

I. megoldás. Helyettesítsünk (1)-ben x helyére $(x - 1)$ -et:

$$(2) \quad f(x) + f(x - 2) = \sqrt{2} \cdot f(x - 1).$$

Helyettesítsünk (1)-ben x helyére $(x + 1)$ -et:

$$(3) \quad f(x + 2) + f(x) = \sqrt{2} \cdot f(x + 1).$$

Adjuk össze (2)-t és (3)-at:

$$2f(x) + f(x - 2) + f(x + 2) = \sqrt{2} \cdot [f(x - 1) + f(x + 1)],$$

ami (1) alapján

$$2f(x) + f(x - 2) + f(x + 2) = 2 \cdot f(x)$$

alakban írható. Vagyis

$$f(x - 2) + f(x + 2) = 0, \quad f(x + 2) = -f(x - 2).$$

Helyettesítsünk x helyére $(x + 2)$ -t:

$$f(x + 4) = -f(x).$$

Helyettesítsünk x helyére $(x + 4)$ -et:

$$f(x + 8) = -f(x + 4) = f(x).$$

Tehát az f függvény valóban periodikus.

Eckert Bernadett (Bonyhád, Petőfi S. Evangélikus Gimn. 9. évf.)

II. megoldás. Írjuk át (1)-et a következő alakba:

$$(2) \quad f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}f(x + 1) + \frac{\sqrt{2}}{2}f(x - 1).$$

A további $f(x + a)$ értékeket $f(x + 1)$ és $f(x - 1)$ segítségével fogjuk kifejezni.

(1)-ben x helyére írjunk $(x + 1)$ -et:

$$f(x + 2) + f(x) = \sqrt{2} \cdot f(x + 1).$$

(2)-t behelyettesítve:

$$\begin{aligned} f(x + 2) + \frac{\sqrt{2}}{2}f(x + 1) + \frac{\sqrt{2}}{2}f(x - 1) &= \sqrt{2} \cdot f(x + 1), \\ f(x + 2) &= \frac{\sqrt{2}}{2}f(x + 1) - \frac{\sqrt{2}}{2}f(x - 1). \end{aligned}$$

(1)-ben x helyére írjunk $(x + 2)$ -t, ekkor az imént kapott formula szerint

$$f(x + 3) + f(x + 1) = \sqrt{2} \cdot f(x + 2) = f(x + 1) - f(x - 1),$$

vagyis

$$f(x + 3) = -f(x - 1).$$

(1)-ben x helyére írjunk $(x + 3)$ -at:

$$f(x + 4) + f(x + 2) = \sqrt{2} \cdot f(x + 3).$$

Az eddigiek felhasználásával ezt így írhatjuk:

$$\begin{aligned} f(x + 4) + \frac{\sqrt{2}}{2}f(x + 1) - \frac{\sqrt{2}}{2}f(x - 1) &= -\sqrt{2} \cdot f(x - 1), \\ f(x + 4) &= -\frac{\sqrt{2}}{2}f(x - 1) - \frac{\sqrt{2}}{2}f(x + 1). \end{aligned}$$

(1)-ben x helyére írjunk $(x + 4)$ -et:

$$f(x + 5) + f(x + 3) = \sqrt{2} \cdot f(x + 4).$$

Az eddigiek felhasználásával:

$$\begin{aligned} f(x + 5) - f(x - 1) &= -f(x - 1) - f(x + 1), \\ f(x + 5) &= -f(x + 1). \end{aligned}$$

(1)-ben x helyére írjunk $(x + 5)$ -öt:

$$f(x + 6) + f(x + 4) = \sqrt{2} \cdot f(x + 5).$$

Az eddigiek felhasználásával:

$$\begin{aligned} f(x + 6) - \frac{\sqrt{2}}{2}f(x - 1) - \frac{\sqrt{2}}{2}f(x + 1) &= -\sqrt{2} \cdot f(x + 1), \\ f(x + 6) &= \frac{\sqrt{2}}{2}f(x - 1) - \frac{\sqrt{2}}{2}f(x + 1). \end{aligned}$$

(1)-ben x helyére írjunk $(x + 6)$ -ot:

$$f(x + 7) + f(x + 5) = \sqrt{2} \cdot f(x + 6).$$

Az eddigiek felhasználásával:

$$\begin{aligned} f(x + 7) - f(x + 1) &= f(x - 1) - f(x + 1), \\ f(x + 7) &= f(x - 1). \end{aligned}$$

Helyettesítsünk itt x helyére $(x + 1)$ -et:

$$f(x + 8) = f(x).$$

Az f függvény tehát valóban periodikus.

Gyarmati Ákos (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., 9. évf.)