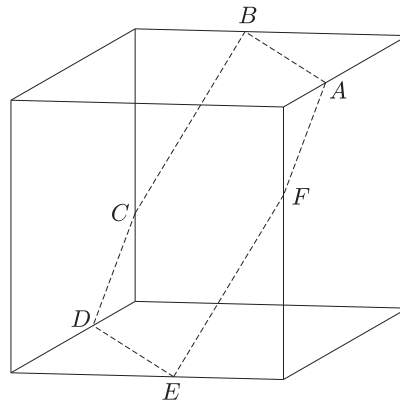
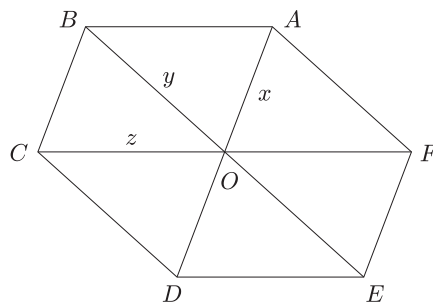


A hatszög különböző oldalainak a kocka különböző lapjain kell lenniük, szemközti oldalaknak szemközti lapokon. Ha két párhuzamos síkot elmetszünk egy harmadikkal, akkor a keletkező két metszévonal is párhuzamos. Mivel a kocka szemközti lapsíkjai párhuzamosak, azért az  $ABCDEF$  hatszög szemközti oldalai is párhuzamosak (1. ábra).



1. ábra



2. ábra

Legyen a hatszög átlóinak metszéspontja  $O$ , az oldalak hossza a 2. ábrán látható módon  $a, b, c, d, e$  és  $f$ , továbbá legyen  $OA = x$ ,  $OB = y$  és  $OC = z$ . Mivel  $AB \parallel DE$ , a párhuzamos szelők tételéből következik, hogy

$$OD = d \cdot \frac{x}{a} \quad \text{és} \quad OE = d \cdot \frac{y}{a}.$$

Ugyanígy kapjuk  $EF$  és  $BC$  párhuzamosságát felhasználva, hogy

$$OE = e \cdot \frac{y}{b} \quad \text{és} \quad OF = e \cdot \frac{z}{b},$$

$FA$  és  $CD$  párhuzamosságából pedig, hogy

$$OF = f \cdot \frac{z}{c} \quad \text{és} \quad OD = c \cdot \frac{x}{f}.$$

Összeszorozva az első, illetve a második oszlopban lévő egyenlőségeket

$$d \cdot \frac{x}{a} \cdot e \cdot \frac{y}{b} \cdot f \cdot \frac{z}{c} = OD \cdot OE \cdot OF = d \cdot \frac{y}{a} \cdot e \cdot \frac{z}{b} \cdot c \cdot \frac{x}{f}$$

adódik, amiből egyszerűsítés után kapjuk, hogy

$$\frac{f}{c} = \frac{c}{f},$$

tehát  $f = c$ . Hasonlóan kapjuk, hogy  $e = b$  és  $d = a$ . Ez azt jelenti, hogy a hatszög középpontosan szimmetrikus, a középpontja  $O$ .

Megmutatjuk, hogy  $O$  egyúttal a kocka középpontja is. Tükrözzük a kocka  $AB$  egyenest tartalmazó  $S$  lapsíkját  $O$ -ra. A tükörkép az az  $S'$  sík lesz, amely párhuzamos  $S$ -sel, és átmegy  $AB$  tükörképén, azaz a  $DE$  egyenesen. Ez a sík tehát éppen a kocka  $S$ -sel párhuzamos lapsíkjá. Ebből következik, hogy  $O$  egyenlő távolságra van a kocka  $AB$ -t, illetve  $DE$ -t tartalmazó párhuzamos lapjaitól. Ugyanígy kapjuk, hogy  $O$  a kocka másik két pár párhuzamos lapjától is egyenlő távolságra van, tehát valóban a kocka középpontja.

A hatszög síkja tehát áthalad a kocka középpontján, és ez a pont egyúttal a hatszögnek is szimmetriacentruma.