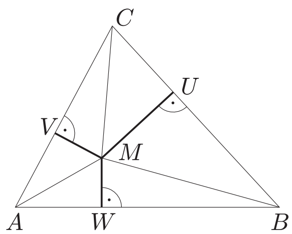
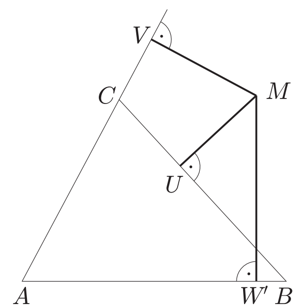
Először azt mutatjuk meg, hogy ha a merőlegesek egy ponton mennek át, akkor fennáll az (1) egyenlőség. Jelöljük a merőlegesek közös pontját M-mel. Az *1. ábrán* látható AM, BM és CM átfogójú, összesen hat darab (esetleg elfajuló) derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele szerint

$$\begin{aligned} AW^2+MW^2&=AM^2=AV^2+MV^2,\\ BU^2+MU^2&=BM^2=BW^2+MW^2,\\ CV^2+MV^2&=CM^2=CU^2+MU^2. \end{aligned}$$

A jobb-, illetve a bal oldalakat összeadva, majd mindkét oldalból kivonva $(MW^2+MU^2+MV^2)$-et, éppen a bizonyítandó (1) összefüggést kapjuk.



1. ábra



2. ábra

Tegyük most fel, hogy (1) teljesül. Állítsunk U-ban merőlegest a BC, V-ben pedig a CA oldalra. Legyen M e két merőleges metszéspontja, az M-ből AB-re állított merőleges talppontját pedig jelöljük W'-vel (*2. ábra*). Ekkor az előzőkben bizonyítottak alapján

$$AW'^2+BU^2+CV^2=AV^2+CU^2+BW'^2,$$

feltevésünk szerint pedig

$$AW^2+BU^2+CV^2=AV^2+CU^2+BW^2.$$

A két egyenlőséget kivonva egymásból kapjuk, hogy

$$AW'^2-AW^2=BW'^2-BW^2. \tag{2}$$

Megmutatjuk, hogy ez csak akkor lehetséges, ha $W\equiv W'$. Ezt legegyszerűbben vektorok segítségével láthatjuk be. (2)-ből következik, hogy

$$\overrightarrow{AW'}^2-\overrightarrow{AW}^2=\overrightarrow{BW'}^2-\overrightarrow{BW}^2,$$

azaz

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AW}^2-\overrightarrow{BW}^2&=\overrightarrow{AW'}^2-\overrightarrow{BW'}^2=\left(\overrightarrow{AW}+\overrightarrow{WW'}\right)^2-\left(\overrightarrow{BW}+\overrightarrow{WW'}\right)^2=\\ &=\overrightarrow{AW}^2-\overrightarrow{BW}^2+2\cdot\overrightarrow{WW'}\cdot\left(\overrightarrow{AW}-\overrightarrow{BW}\right). \end{aligned}$$

Tehát

$$\overrightarrow{WW'}\cdot\left(\overrightarrow{AW}-\overrightarrow{BW}\right)=\overrightarrow{WW'}\cdot\overrightarrow{AB}=0.$$

Mivel $\overrightarrow{AB}\neq\mathbf{0}$, továbbá $\overrightarrow{WW'}$ párhuzamos az $\overrightarrow{AB}$-ral, a szorzat csak akkor lehet 0, ha $\overrightarrow{WW'}=\mathbf{0}$, azaz ha W' egybeesik W-vel. Ezzel az állítás második felét is bebizonyítottuk.

Nagy Szabolcs (Budapest, ELTE Trefort Ágoston Gyak. Isk., 12. évf.)