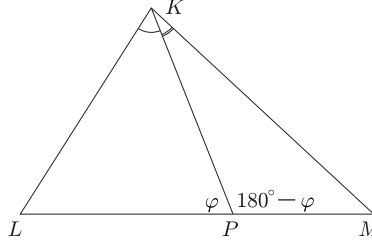


Megmutatjuk, hogy az AA_2 , BB_2 és CC_2 egyenesek megegyeznek az ABC háromszög súlyvonalával. Ebből feladatunk állítása nyilván következik.



1. ábra

Először egy lemmát igazolunk: Legyen a KLM háromszög LM oldalának tetszőleges pontja P . Ekkor

$$(1) \quad \frac{LP}{PM} = \frac{KL \cdot \sin PKL \angle}{KM \cdot \sin PKM \angle}.$$

Bizonyítás. A PKL háromszögben a szinusztétel szerint (1. ábra):

$$(2) \quad \frac{LP}{KL} = \frac{\sin PKL \angle}{\sin KPL \angle};$$

a PKM háromszögben pedig ugyancsak a szinusztétel szerint:

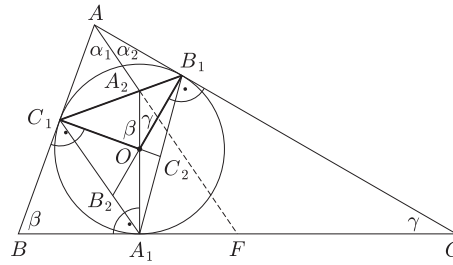
$$(3) \quad \frac{PM}{KM} = \frac{\sin PKM \angle}{\sin KPM \angle}.$$

A (2) egyenlőséget elosztva (3)-mal, majd rendezve (és felhasználva, hogy mivel $KPL \angle = 180^\circ - KPM \angle$, azért $\sin KPL \angle = \sin KPM \angle$), éppen a bizonyítandó (1) összefüggést kapjuk.

Térjünk vissza eredeti feladatunkhoz. Jelöljük az ABC háromszög szögeit a szokásos módon α , β , γ -val, legyen $C_1AA_2 \angle = \alpha_1$, $B_1AA_2 \angle = \alpha_2$, az AA_2 egyenes és a BC oldal metszéspontja pedig F (2. ábra). Az OC_1BA_1 négyszög C_1 -nél és A_1 -nél lévő szögei derékszögek, ezért $C_1OA_1 \angle = 180^\circ - \beta$, vagyis $C_1OA_2 \angle = \beta$. Ugyanígy kapjuk, hogy $B_1OA_2 \angle = \gamma$. Alkalmazzuk lemmánkat az OB_1C_1 háromszögre és az A_2 pontra:

$$\frac{B_1A_2}{A_2C_1} = \frac{OB_1 \cdot \sin \gamma}{OC_1 \cdot \sin \beta}.$$

Az AB_1C_1 háromszögre és az A_2 pontra alkalmazva a lemmát:



2. ábra

$$\frac{B_1A_2}{A_2C_1} = \frac{AB_1 \cdot \sin \alpha_2}{AC_1 \cdot \sin \alpha_1}.$$

Mivel $OB_1 = OC_1$ (mindkettő a beírt kör sugara) és $AB_1 = AC_1$ (mindkettő A -ból a beírt körhöz húzott érintőszakasz), a fenti összefüggésekből következik, hogy

$$(4) \quad \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1}.$$

Írjuk fel lemmánkat most az ABC háromszögre és az F pontra:

$$\frac{BF}{FC} = \frac{AB \cdot \sin \alpha_1}{AC \cdot \sin \alpha_2}.$$

Ebből (4), valamint az ABC háromszögre vonatkozó szinusztétel felhasználásával

$$\frac{BF}{FC} = \frac{AB \cdot \sin \beta}{AC \cdot \sin \gamma} = 1$$

következik, azaz F valóban felezi a BC oldalt. Ugyanígy kapjuk, hogy a BB_2 és a CC_2 egyenesek is súlyvonalak az ABC háromszögben.