I. megoldás. A 31 prímszám, azért a „kis” Fermat-tétel szerint osztója a $10^{30}-1$ számnak. Mivel $\left(10^{30}\right)^k-1^k$ osztható $(10^{30}-1)$-gyel, azért a 31 osztója az összes $10^{30k}-1$ alakú számnak is (k tetszőleges pozitív egész). Osztója tehát ezen számok harmadrészének is, vagyis minden olyan számnak, ami $30k$ darab 3-as számjegyből áll. Egy ilyen számot 100-zal megszorozva, majd az eredményhez 31-et hozzáadva újfent 31-gyel osztható számhoz jutunk, és minden ilyen szám a megadott sorozathoz tartozik. Ezek szerint 31-től kezdve a sorozat minden 30-adik eleme osztható 31-gyel, ezek tehát a 31 kivételével valamennyien összetettek. Ezzel beláttuk, hogy a sorozatban végtelen sok összetett szám van.

Megjegyzés. A „kis” Fermat-tételt számos számelmélettel foglalkozó könyvben megtalálhatjuk, például Dr. Szalay Mihály: *Számelmélet* című tankönyvében is.

II. megoldás. Az $1, 31, 331, 3331, \dots$ sorozatban végtelen sok olyan elem van, amelyben $16k+8$ darab 3-as van. Tekintsük ezeket az elemeket:

$$\underbrace{333\dots333}_{16k+8\text{ db}}1=\frac{\overbrace{999\dots999}^{16k+8\text{ db}}3}{3}=\frac{\overbrace{999\dots9999}^{16k+9\text{ db}}-6}{3}=\frac{10^{16k+9}-1-6}{3}=\frac{10^{16k+9}-7}{3}.$$

Ha belátjuk, hogy $17 \mid 10^{16k+9}-7$, akkor $(3;17)=1$ miatt $\dfrac{10^{16k+9}-7}{3}$ is osztható 17-tel, azaz $17 \mid \underbrace{333\dots333}_{16k+8}1$ is fennáll. Ehhez igazolni kell, hogy $10^{16k+9}\equiv 7 \mod 17$.

A kongruencia szabályait felhasználva:

$$\begin{aligned}10^{16k+9}&=10^9\cdot\left(10^{16}\right)^k=1000^3\cdot\left(10\,000^4\right)^k=\\&=(58\cdot 17+14)^3\cdot\left((588\cdot 17+4)^4\right)^k\equiv 14^3\cdot\left(4^4\right)^k=\\&=(161\cdot 17+7)(15\cdot 17+1)^k\equiv 7\cdot 1^k=7 \pmod{17}.\end{aligned}$$

Tehát $10^{16k+9}-7\equiv 0 \pmod{17}$, így $17 \mid \underbrace{333\dots333}_{16k+8}1$ minden k-ra. A sorozatnak végtelen sok eleme osztható 17-tel, ezért végtelen sok eleme összetett.

Bóka Gergely (Szolnok, Verseghy Ferenc Gimn., 11. évf.)