

**I. megoldás.** A kitevőben  $\log_x 50$ -et írjuk át 10-es alapú logaritmusra:

$$\log_x 50 = \frac{\lg 50}{\lg x}.$$

Ezt beírjuk az egyenletbe és mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát vesszük:

$$\lg x - \lg 20 = \frac{\lg 50}{\lg x} (\lg 5 - \lg 2).$$

Hozunk közös nevezőre. Felhasználva, hogy  $\lg 20 = 1 + \lg 2$ ,  $\lg 50 = 1 + \lg 5$ , a következő másodfokú egyenletet kapjuk  $\lg x$ -re:

$$\lg^2 x - (1 + \lg 2) \lg x - \lg 5(1 + \lg 5) + \lg 2(1 + \lg 5).$$

Innen

$$\lg x = \frac{\lg 2 + 1 \pm \sqrt{(1 + \lg 2)^2 + 4 \lg 5(1 + \lg 5) - 4 \lg 2(1 + \lg 5)}}{2}.$$

A gyökjel alatti műveleteket elvégezve a gyökjel alatt a  $(2 \lg 5 - \lg 2 + 1)^2$  áll. Így

$$\lg x_1 = \frac{\lg 2 + 1 + 2 \lg 5 - \lg 2 + 1}{2} = 1 + \lg 5 = \lg 10 + \lg 5 = \lg 50, \quad x_1 = 50,$$

illetve

$$\lg x_2 = \frac{\lg 2 + 1 - 2 \lg 5 + \lg 2 - 1}{2} = \lg 2 - \lg 5 = \lg \frac{2}{5}, \quad x_2 = \frac{2}{5}.$$

Mindkét szám megoldása is az egyenletnek.

**II. megoldás.**  $x_1 = 50$  nyilván megoldás, ezért keressük a továbbiakban a  $0 < x \neq 1; 50$  megoldásokat. A logaritmus azonosságainak felhasználásával:

$$\begin{aligned} \frac{x}{20} &= \frac{x}{50} \cdot \frac{5}{2} = \left(\frac{5}{2}\right)^{\log_x 50}, \\ \frac{x}{50} &= \left(\frac{5}{2}\right)^{\log_x 50 - 1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{\log_x 50 - \log_x x} = \left(\frac{5}{2}\right)^{\log_x \frac{50}{x}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{\log \frac{50}{x}} x}, \\ \left(\frac{x}{50}\right)^{\log \frac{50}{x} x} &= \frac{5}{2}, \quad \frac{1}{x} = \frac{5}{2}, \quad x = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

A feladat megoldásai:  $x_1 = 50$  és  $x_2 = \frac{2}{5}$ .