

**I. megoldás.** A vizsgált kifejezés szimmetrikus, így felírható  $x + y (= 1)$  és  $xy = t$  polinomjaként. Valóban:

$$A(x, y) = xy^4 + x^4y = xy(x^3 + y^3) = xy[(x + y)(x^2 - xy + y^2)].$$

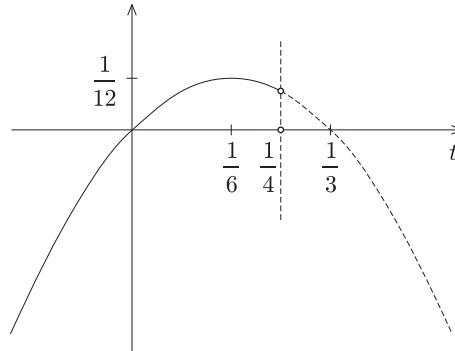
Mivel  $x^2 - xy + y^2 = (x + y)^2 - 3xy$ , azért

$$A(x, y) = xy[(x + y)((x + y)^2 - 3xy)] = xy(1 - 3xy).$$

Ha  $x + y = 1$ , akkor az  $xy = t$  szorzat értékkészlete a  $] -\infty; 1/4]$  intervallum, ugyanis az

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ xy = t \end{array} \right\}$$

egyenletrendszerből kapott másodfokú egyenlet diszkriminánsa  $D = 1 - 4t$ , az egyenletrendszernek akkor és csak akkor van valós megoldása, ha  $t \leq \frac{1}{4}$ .



1. ábra

Az  $x + y = 1$  feltétel esetén tehát a kétváltozós  $A(x, y)$  polinom értékkészlete az  $I = ] -\infty; 1/4]$  intervallumon megegyezik az  $f(t) = t(1 - 3t)$  függvény értékkészletével (1. ábra). A valós számok halmazára kiterjesztett  $f$  függvényt a  $t = \frac{1}{6}$  helyen veszi föl az abszolút maximumát és ez az érték  $f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}$ . Mivel  $\frac{1}{6} \in I$ , azért ennyi az  $I$  intervallumon értelmezett  $f(t)$  függvény maximuma, tehát a szóban forgó  $A(x, y)$  legnagyobb értéke is az  $x + y = 1$  feltétel esetén.

*Pálincás Csaba* (Szolnok, Verseghy F. Gimn. 9. évf.)

**Megjegyzések.** 1. A megoldók többsége az  $xy^4 + x^4y$  kifejezést az  $x + y = 1$  feltételt felhasználva  $-3\left(xy - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{12}$  alakba írta. Több mint 100 dolgozatban ezek után minden további nélkül olyasmi szerepelt, hogy eszerint a keresett maximum értéke  $\frac{1}{12}$ . Ez csak akkor igaz, ha az összeg első tagja,  $-3\left(xy - \frac{1}{6}\right)^2$  fölveszi a 0 értéket, azaz van olyan  $x$  és  $y$ , melyek összege 1, szorzatuk pedig  $\frac{1}{6}$ . A megoldásból ez kiderül, bár ott ezeket az értékeket nem számoltuk ki. Az

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ xy = \frac{1}{6} \end{array} \right\}$$

egyenletrendszer megoldásával nyomban adódnak a változóknak azok az értékei, amelyekre  $A(x, y)$  maximális:  $\{x, y\} = \left\{ \frac{3 - \sqrt{3}}{6}, \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \right\}$ .

2. A feladat eredménye szerint ha  $x + y = 1$ , akkor  $xy^4 + x^4y \leq \frac{1}{6}$ . Ebben a formában arra a ritkább jelenségre láthatunk példát, amikor egy szimmetrikus egyenlőtlenségben nem a változók egyenlő értékeire kapjuk a maximumot.

**II. megoldás.** A feladatot a differenciálszámítás alkalmazásával oldjuk meg. Az eredetileg kétváltozós függvényt az  $y = 1 - x$  helyettesítéssel egyváltozós polinomná írhatjuk:

$$f(x) = x(1 - x)^4 + x^4(1 - x).$$

Írjuk föl a függvény deriváltját, majd a hatványozás elvégzése után rendezzük a polinomot:

$$f'(x) = (1 - x)^4 - 4x(1 - x)^3 + 4x^3(1 - x) - x^4 = -12x^3 + 18x^2 - 8x + 1.$$

Az eredeti kétváltozós polinom szimmetrikus, így teljesül, hogy  $f(x) = f(1 - x)$ . A deriváltra nézve innen  $f'(x) = -f'(1 - x)$  adódik, azaz  $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -f'\left(\frac{1}{2}\right)$  és így  $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$  következik. Ennek alapján a derivált szorzattá alakítható:

$$f'(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(-12x^2 + 12x - 2).$$

A másodfokú tényezőnek két valós gyöke van,  $x_1 = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}$  és  $x_2 = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}$ . Jegyezzük meg, hogy  $x_1 + x_2 = 1$  miatt  $f(x_1) = f(x_2)$ .

Mivel a harmadfokú  $f'(x)$ -nek három különböző valós gyöke van és a főegyütthatója negatív, a grafikonja fölvázolható: (2. ábra). A grafikonról leolvasható a derivált előjele, és így az is, hogy  $f$ -nek két lokális maximuma van:  $x_1$ -ben és  $x_2$ -ben. Azt már láttuk, hogy ezek a maximumok egyenlők és mivel  $f$  szigorúan monoton növekvő, ha  $x < x_1$  és szigorúan monoton fogyó, ha  $x > x_2$ , azért ez a közös érték,  $f(x_1) = f(x_2) = \frac{1}{12}$  a függvény abszolút maximuma.



*3. ábra*

*Szilágyi Péter* (Debrecen, Kossuth L. Gyak. Gimn. 10. évf.)

*Megjegyzés.* A fenti vizsgálatból az is kiderül, hogy  $f$ -nek lokális minimuma van, ha  $x = \frac{1}{2}$ ; ennek értéke  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$ . Az  $f$  függvény grafikonja a *3. ábrán* látható.