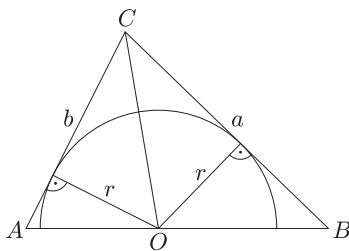


I. megoldás. Jelölje a körülírt háromszög félkört érintő oldalait a és b . A félkör O középpontját a háromszög szemközti csúcsával összekötő szakasz a háromszöget két olyan háromszögre bontja, melyeknek az a illetve b oldalához tartozó magassága r , a félkör sugara (1. ábra) Ennek megfelelően a háromszög kétszeres területe:

$$2T = (a + b) \cdot r.$$



1. ábra

A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség szerint $a + b \geq 2\sqrt{ab}$; ennek felhasználásával a fenti egyenlőségéből az alábbi becslést kapjuk:

$$(1) \quad T \geq r\sqrt{ab}.$$

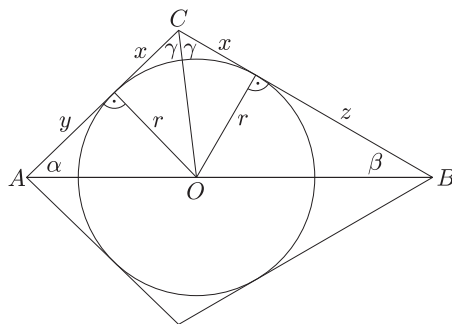
Jegyezzük meg, hogy itt pontosan akkor van egyenlőség, ha $a = b$, a háromszög egyenlő szárú.

Megjegyzés. Láthatóan elegendő az egyenlő szárú körülírt háromszögek közül megkeresni a minimális területűt, ez az út viszont váratlan problémákat vet föl. A fentiekből egészen pontosan annyi következik, hogy az $a \neq b$ oldalú körülírt háromszögnél biztosan kisebb területű az egyenlő, $\frac{a+b}{2}$ -szárú körülírt háromszög – ha ez utóbbi létezik. Egy szerencsés további becsléssel ez a vizsgálat elkerülhető.

A háromszög kétszeres területére fennálló $2T = ab \sin \gamma$ összefüggésből $0 < \sin \gamma \leq 1$ miatt $ab \geq 2T$ adódik, és pontosan akkor van egyenlőség, ha az a és b oldalak szöge derékszög. Az (1) egyenlőtlenség jobb oldala tehát alulról becsülhető: $r\sqrt{ab} \geq r\sqrt{2T}$ és így a

$$T \geq r\sqrt{2T}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Négyzetre emelve és T -vel osztva $T \geq 2r^2$ és láttuk, hogy pontosan akkor van egyenlőség, ha a háromszög egyenlő szárú és derékszögű.



2. ábra

II. megoldás. Jelölje T a háromszög területét. Tükrözzük a háromszöget a félkör átmérőjére (2. ábra). Az így kapott deltoid érintőnégyyszög, területe tehát a beírt kör sugarának és a kerület felének a szorzata. Használjuk az ábra jelöléseit: az érintő szakaszok hossza

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \operatorname{ctg} \gamma; & y &= r \cdot \operatorname{ctg} \alpha; \\ z &= r \cdot \operatorname{ctg} \beta. \end{aligned}$$

Innen

$$2T = r \frac{4x + 2y + 2z}{2} = r^2(2 \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta).$$

α , β és γ egy konvex négyszög egy-egy szögének a fele, így mindegyikük hegyesszög. A kotangens függvény konvex a $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon, így a *Jensen egyenlőtlenség* szerint:

$$\frac{2 \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{4} \geq \operatorname{ctg} \frac{2\gamma + \alpha + \beta}{4} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1.$$

Így $2T = r^2(2 \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) \geq 4r^2$, egyenlőség pedig pontosan akkor teljesül, ha $\alpha = \beta = \gamma = 45^\circ$, a minimális területű körülírt háromszög tehát egyenlő szárú és derékszögű.

