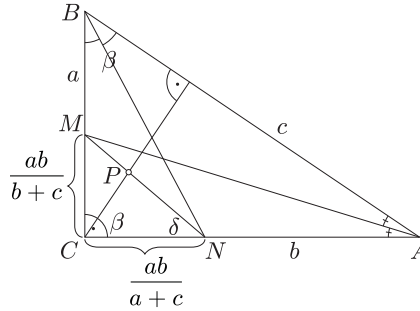


Feltehetjük, hogy M a BC , N pedig az AC oldalon van. Jelöljük a háromszög oldalait a szokásos módon a , b , c -vel, a B -nél lévő szögét β -val. Legyen továbbá $PNC \sphericalangle = \delta$ (lásd az *ábrát*).



A szögfelezőtétel szerint $\frac{CM}{MB} = \frac{b}{c}$, ezért $CM = \frac{b}{b+c} \cdot CB = \frac{a \cdot b}{b+c}$. Ugyanígy kapjuk, hogy

$$(1) \quad CN = \frac{a \cdot b}{a+c}.$$

Mivel a CP egyenes merőleges AB -re, azért a $PCN \sphericalangle$ és az $ABC \sphericalangle$ merőleges szárú hegyesszögek, tehát $PCN \sphericalangle = \beta$. A PCN háromszög P -nél lévő szöge így $180^\circ - \beta - \delta$. Ebben a háromszögben a szinusz-tétel szerint

$$\begin{aligned} \frac{CN}{CP} &= \frac{\sin(180^\circ - \beta - \delta)}{\sin \delta} = \frac{\sin(\beta + \delta)}{\sin \delta} = \\ &= \frac{\sin \beta \cos \delta + \cos \beta \sin \delta}{\sin \delta} = \sin \beta \cdot \operatorname{ctg} \delta + \cos \beta. \end{aligned}$$

A szögfüggvények értékeit az ABC , illetve az NMC háromszög oldalaival kifejezve kapjuk, hogy

$$\frac{CN}{CP} = \frac{b}{c} \cdot \left(\frac{a \cdot b}{a+c} \bigg/ \frac{a \cdot b}{b+c} \right) + \frac{a}{c} = \frac{b \cdot (b+c)}{c \cdot (a+c)} + \frac{a}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c \cdot (a+b)}{c \cdot (a+c)}.$$

Felhasználva Pitagorasz tételét, valamint az (1) összefüggést, ebből

$$(2) \quad CP = CN \cdot \frac{c(a+c)}{c^2 + c(a+b)} = \frac{a \cdot b}{a+b+c}$$

adódik.

Ismert, hogy ha egy háromszög területe T , beírt körének sugara r , oldalai pedig a , b , c , akkor $r = \frac{2T}{a+b+c}$. Mivel esetünkben az ABC derékszögű háromszög befogói a és b , azért $2T = a \cdot b$, tehát a (2) összefüggésből következik, hogy $CP = r$, ami éppen a bizonyítandó állítás.