

Legyen $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, ahol $a_n, \dots, a_0$ egészek. Ha β tetszőleges szám, akkor f -et mindig átírhatjuk $y = x - \beta$ hatványai szerint:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y + \beta) = a_n (y + \beta)^n + a_{n-1} (y + \beta)^{n-1} + \dots + a_1 (y + \beta) + a_0 = \\ &= c_n y^n + c_{n-1} y^{n-1} + \dots + c_1 y + c_0 = g(y). \end{aligned}$$

Itt nyilván $c_n = a_n$ és $f(\beta) = g(0) = c_0$. A c_i együtthatók már nem feltétlenül egészek; ha azonban β egész szám, akkor mindegyik c_i is egész, hiszen ezek az eredeti a_j együtthatókból és β -ból kaphatók meg néhány összeadás és szorzás (az $a_j (y + \beta)^j$ hatványozások elvégzése és rendezés) eredményeként. Ugyanígy látható az is, hogy ha $\beta = \frac{A}{B}$ racionális szám (A és B egészek), akkor legalábbis $B^n c_i$ értéke egész, minden i -re.

Alkalmazzuk észrevételeinket először arra az esetre, amikor $\beta = k$ egész szám. Az elmondottak szerint ekkor

$$f = b_n (x - k)^n + b_{n-1} (x - k)^{n-1} + \dots + b_1 (x - k) + b_0,$$

ahol a b_i együtthatók egészek, és $b_0 = f(k)$. Ha p és q egymáshoz relatív prím egészek és $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, akkor

$$\begin{aligned} 0 &= f\left(\frac{p}{q}\right) = b_n \left(\frac{p}{q} - k\right)^n + b_{n-1} \left(\frac{p}{q} - k\right)^{n-1} + \dots + b_1 \left(\frac{p}{q} - k\right) + b_0, \\ 0 &= q^n \left(b_n \left(\frac{p}{q} - k\right)^n + b_{n-1} \left(\frac{p}{q} - k\right)^{n-1} + \dots + b_1 \left(\frac{p}{q} - k\right) + b_0 \right) = \\ &= b_n (p - kq)^n + q b_{n-1} (p - kq)^{n-1} + \dots + q^{n-1} b_1 (p - kq) + q^n b_0. \end{aligned}$$

Az utóbbi egyenlőség jobb oldalán egy kivételével mindegyik tagból kiemelhető $p - kq$; mivel az összeg értéke nulla, azért az utolsó tag is osztható $(p - kq)$ -vel:

$$p - kq \mid q^n b_0.$$

Feltevésünk szerint p és q relatív prímek, így $p - kq$ is relatív prím q -hoz, tehát q^n -hez is; ezért a kapott oszthatóság csak úgy teljesülhet, ha valóban $p - kq \mid b_0 = f(k)$.

Megmutatjuk, hogy az állítás megfordítása is igaz; ehhez tegyük fel, hogy p és $q \neq 0$ olyan egészek, hogy $a \mid p - kq \mid f(k)$ oszthatóság minden k egészre teljesül. Írjuk át az f polinomot ezúttal $x - \frac{p}{q}$ hatványai szerint:

$$f = c_n \left(x - \frac{p}{q}\right)^n + c_{n-1} \left(x - \frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + c_1 \left(x - \frac{p}{q}\right) + c_0,$$

ahol tehát $c_0 = f\left(\frac{p}{q}\right)$, és a c_i együtthatók q^n -szeresei egész számok. Ezt felhasználandó szorozzuk az egyenlőség mindkét oldalát q^{2n} -nel:

$$q^{2n} f = (q^n c_n)(qx - p)^n + q(q^n c_{n-1})(qx - p)^{n-1} + \dots + q^{n-1}(q^n c_1)(qx - p) + q^n(q^n c_0),$$

így minden k egész számra

$$\begin{aligned} q^{2n} f(k) &= (q^n c_n)(qk - p)^n + q(q^n c_{n-1})(qk - p)^{n-1} + \dots + \\ &+ q^{n-1}(q^n c_1)(qk - p) + q^n(q^n c_0). \end{aligned}$$

Feltettük, hogy a bal oldalon álló $f(k)$ osztható $(p - kq)$ -vel, a jobb oldalon pedig az utolsó kivételével mindegyik tagból kiemelhető $qk - p = -(p - kq)$; ezért az utolsó tag, $q^n(q^n c_0)$ is osztható $(p - kq)$ -vel. Ez minden k egészre fennáll, tehát ($q \neq 0$ szerint) a $q^n(q^n c_0)$ számnak végtelen sok osztója van. Ez csak úgy lehet, ha $q^n(q^n c_0) = 0$, vagyis $f\left(\frac{p}{q}\right) = c_0 = 0$.

Megjegyzések: 1. A bizonyítás első részében lényegében azt használtuk fel, hogy ha $\frac{p}{q}$ gyöke az $f(x)$ polinomnak, akkor $\frac{p - kq}{q}$ gyöke a $g(x) = f(x + k)$ polinomnak. Az állítás első része így egyszerű következménye annak az ismert eredménynek, hogy egy egész együtthatós polinom racionális gyökének egyszerűsített alakjában a számláló osztója a polinom konstans tagjának, ami a polinom 0 helyen vett helyettesítési értéke. Az állítás egyébként a $k = 0$ speciális esetben éppen ezt adja.

2. Az idézett eredménnyel együtt szokás kimondani, hogy a racionális gyök nevezője, q , osztója a főegyütthatónak. E két feltétel együttesen is csak szükséges ahhoz, hogy az egyszerűsített alakban felírt $\frac{p}{q}$ gyöke legyen az $f(x)$ polinomnak, egy szükséges és elégséges feltételt épp a feladat mond ki.