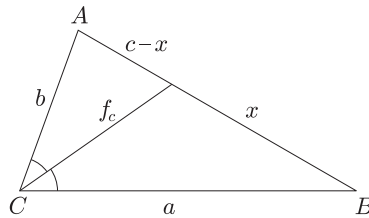


Az ABC háromszög C -ből induló szögfelezője f_c . Fejezzük ki f_c -t a háromszög oldalainak segítségével.



Az f_c szögfelező a C oldalt x és $c - x$ hosszúságú részekre osztja az *ábra* szerint, a C csúcsnál lévő szög γ . Mint ismeretes,

$$x = \frac{ac}{a+b}, \quad c-x = \frac{bc}{a+b}.$$

Írjuk fel a részháromszögekre a koszinusz tételt:

$$x^2 = a^2 + f_c^2 - 2af_c \cos \frac{\gamma}{2}, \quad (c-x)^2 = b^2 + f_c^2 - 2bf_c \cos \frac{\gamma}{2}.$$

A két egyenletből fejezzük ki $\cos \frac{\gamma}{2}$ -t. A két kifejezés egyenlőségéből egyszerűsítés után kapjuk, hogy

$$b(a^2 + f_c^2 - x^2) = a(b^2 + f_c^2 - (c-x)^2).$$

Helyettesítsük be az x és $c-x$ előbb kapott értékeit:

$$b \left(a^2 + f_c^2 - \left(\frac{ac}{a+b} \right)^2 \right) = a \left(b^2 + f_c^2 - \left(\frac{bc}{a+b} \right)^2 \right).$$

Innen f_c kifejezhető. A műveletek elvégzése és egyszerűsítés után, valamint felhasználva az $s = \frac{a+b+c}{2}$ jelölést, kapjuk, hogy

$$f_c = \sqrt{\frac{4ab \cdot s(s-c)}{(a+b)^2}}.$$

A betűk ciklikus cseréjével hasonló összefüggést írhatunk fel az f_a és f_b szögfelezőkre is.

Írjuk fel az $f_a f_b f_c$ szorzatot:

$$f_a f_b f_c = \sqrt{\frac{4ac \cdot s(s-b) \cdot 4ab \cdot s(s-c) \cdot 4bc \cdot s(s-a)}{(c+a)^2 \cdot (b+c)^2 \cdot (a+b)^2}}.$$

A számlálóból kiemelhetjük a $8s \cdot abc$ -t, a nevező tényezőiből pedig gyököt vonunk, így kapjuk, hogy

$$f_a f_b f_c = \frac{2s \cdot abc \cdot 4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{(a+b)(b+c)(a+c)}.$$

Itt $2s = a+b+c$, Héron képlete szerint pedig $4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 4T$, ezeket helyettesítve valóban az (1) összefüggést kapjuk.

Metzing András (Pécs, Leöwey Klára Gimn., 11. évf.)