

Az f polinom nem konstans, hiszen ekkor

$$f(x^2 + 1) - f(x^2 - 1) = c - c = 0.$$

Ha $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, akkor

$$f(x^2 + 1) = a_n (x^2 + 1)^n + a_{n-1} (x^2 + 1)^{n-1} + \dots + a_1 (x^2 + 1) + a_0$$

és

$$f(x^2 - 1) = a_n (x^2 - 1)^n + a_{n-1} (x^2 - 1)^{n-1} + \dots + a_1 (x^2 - 1) + a_0.$$

Tekintsük a két polinom különbségének általános tagját:

$$d_k(x) = a_k [(x^2 + 1)^k - (x^2 - 1)^k].$$

Felhasználva az $u^k - v^k = (u - v)(u^{k-1} + u^{k-2}v + \dots + v^{k-1})$ azonosságot, kapjuk, hogy $d_k(x) = 2a_k [(x^2 + 1)^{k-1} + (x^2 + 1)^{k-2}(x^2 - 1) + \dots + (x^2 - 1)^{k-1}]$. A zárójelben $(2k - 2)$ -edfokú polinomok összege áll, mindegyikük főegyütthatója 1, így $d_k(x)$ vagy zéruspolinom – ha $a_k = 0$ – vagy pedig pontosan $(2k - 2)$ -edfokú.

Az $f(x^2 + 1) - f(x^2 - 1)$ különbség zérustól különböző tagjai fokszámai között tehát nincsenek egyenlők, a fokszáma így a legmagasabb fokú tag fokszáma, $2n - 2$.

A feltétel szerint másodfokú $f(x^2 + 1) - f(x^2 - 1)$ polinom tehát pontosan $(2n - 2)$ -edfokú és így $n = 2$. Ekkor $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, az $f(x^2 + 1) - f(x^2 - 1)$ különbség pedig

$$a_2 (x^2 + 1)^2 + a_1 (x^2 + 1) + a_0 - a_2 (x^2 - 1) - a_1 (x^2 - 1) - a_0 = 4a_2 x^2 + 2a_1.$$

A feltétel szerint ez a különbség $4x^2 + 6$. Két polinom pontosan akkor egyenlő, ha az azonos fokszámú tagok együtthatói egyenlők, ahonnan $a_2 = 1$ és $a_1 = 3$. Az $f(x)$ polinom tehát $x^2 + 3x + a_0$ alakú, ahol a_0 tetszőleges valós szám lehet. Így

$$f(x^2 + 1) - f(x^2) = (x^2 + 1)^2 + 3(x^2 + 1) + a_0 - [(x^2)^2 + 3x^2 + a_0] = 2x^2 + 4.$$

Kőríz András (Budapest, Veres Péter Gimn., 12. évf.)