

A feladatot 2001 helyett tetszőleges n kitevőre oldjuk meg.

Tekintettel arra, hogy az adott és a keresett kifejezés hasonló alakú, vizsgáljuk meg, hogy $\{a\} + \left\{\frac{1}{a}\right\}$ milyen a -ra lehet egész szám. A $0 \leq \{a\} < 1$ és $0 \leq \left\{\frac{1}{a}\right\} < 1$ miatt az összeg ilyenkor vagy 1, vagy pedig 0. Ez utóbbi csak akkor lehetséges, ha a és $\frac{1}{a}$ is egész, azaz $a = \pm 1$. Így $1 = \{x\} + \left\{\frac{1}{x}\right\} = x - [x] + \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$ miatt $x + \frac{1}{x}$ egész szám, de sem x , sem $\frac{1}{x}$ nem az.

Az n szerinti teljes indukcióval megmutatjuk, hogy ekkor tetszőleges n -re $x^n + \frac{1}{x^n}$ is egész szám; $n = 1$ -re a kiinduló feltételt nyerjük, ami nyilvánvalóan igaz. Tételizzük fel, hogy valamilyen k -ig minden természetes számra igaz az állítás. Ekkor $\left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) = x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} + \frac{1}{x^{k-1}} + x^{k-1}$, ebből pedig

$$x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = \left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) - \left(\frac{1}{x^{k-1}} + x^{k-1}\right),$$

ahol az indukciós feltevés szerint a jobb oldalon

$$\left(x + \frac{1}{x}\right), \quad \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right), \quad \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)$$

egész számok, tehát $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}$ is egész – ezzel az állításunkat beláttuk. A bizonyított állítás szerint (minden n -re)

$$x^n + \frac{1}{x^n} - [x^n] - \left[\frac{1}{x^n}\right] = \{x^n\} + \left\{\frac{1}{x^n}\right\}$$

is egész szám.

Láttuk, hogy egy ilyen alakú összeg csak akkor lehet egész szám, ha az 0 vagy 1; 0 pedig csak akkor, ha $x^n = \pm 1$, azaz $x = \pm 1$, ezt a lehetőséget azonban a feladat feltételei kizárják. Tehát minden n pozitív egészre $\{x^n\} + \{x^{-n}\} = 1$.

Megmutatjuk, hogy található olyan x , amely eleget tesz a kiinduló feltételnek. Legyen pl. $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, ekkor

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{3 + \sqrt{5}} = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Ezek összege egész szám, nevezetesen 3, de maguk nem egészek, tehát a törtrészek összege 1.

Fehér Gábor (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., 10. o.t.)

Paulin Roland (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn. és Ált. Isk., 8. o.t.) dolgozatai alapján

Megjegyzések. 1. Felmerül a kérdés, hogy mely x -ekre áll fenn a feladatban adott összefüggés. Az $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$ megállapításból $x + \frac{1}{x} = k$ (ahol $k \in \mathbb{Z}$) következik. Ebből pedig az $x^2 - kx + 1 = 0$ másodfokú egyenletet nyerjük. Ennek megoldásai a $\frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}$ alakú számok, mégpedig a $\frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2}$ reciproka éppen a $\frac{k - \sqrt{k^2 - 4}}{2}$. A kapott gyök minden $|k| \geq 2$ egészre megoldást ad, de $|k| = 2$ esetén maga a gyök is egész. Ez az x nem megfelelő, így $|k| \geq 3$ szükséges; másrészt egyszerűen belátható, hogy x értéke más k -ra nem lehet egész.

2. Az x lehetséges értékeinek ismeretében *páros* k esetén könnyen látható, hogy $x^{2001} + \frac{1}{x^{2001}}$ egész, de páratlan k esetében ez már nem annyira nyilvánvaló. Ekkor a megoldásban is látott indukcióval (vagy az összegben keletkező 2002 tag együtthatóinak ellenőrzésével) számolható ki ugyanez. Ebből (ahogyan azt a megoldásban láttuk) már következik, hogy a törtrészek összege is egész szám, de nem 0, tehát 1.