

Megoldás. A számtáblázat a -adik sorának b -edik eleme $(a-1) \cdot n + b$ -vel egyenlő ($1 \leq a \leq n$, $1 \leq b \leq n$).

Ha minden sorból kiválasztunk egy számot, akkor összesen n darabot veszünk ki, és mivel ezek közül semelyik kettő nem lehet ugyanabban az oszlopban, így minden sorból és oszlopból *pontosan egy* elemet választottunk. Ha az i -edik sorban a b_i -edik elemet választjuk ki, akkor a kiválasztott elemek összege

$$\begin{aligned} & 0 \cdot n + b_1 + 1 \cdot n + b_2 + 2 \cdot n + b_3 + \cdots + (n-1) \cdot n + b_n = \\ (*) \quad & = \frac{(n-1) \cdot n}{2} \cdot n + b_1 + b_2 + \cdots + b_n. \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy $1 \leq b_i \leq n$, és minden érték szerepel, ezért az összegük $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$. Eszerint $(*)$ értéke:

$$\frac{(n-1) \cdot n}{2} \cdot n + \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{n^2(n-1) + n \cdot (n+1)}{2} = \frac{n^3 + n}{2},$$

és ez az összeg független a megválasztott számoktól.

Megjegyzés. Az x -edik sor y -edik elemére az a_{xy} jelölést használva belátható, hogy $a_{ij} + a_{kl} = a_{il} + a_{kj}$, hiszen

$$a_{ij} + a_{kl} = (i-1) \cdot n + j + (k-1) \cdot n + l,$$

$$a_{il} + a_{kj} = (i-1) \cdot n + l + (k-1) \cdot n + j.$$

Eszerint a kiválasztott a_{1j_1} és a_{k_1n} elemek helyett az a_{1n} és $a_{k_1j_1}$ elemeket összeadva ugyanazt az eredményt kapjuk, tehát kicserélhetjük a kiválasztottakat ezekre. Továbbra is ugyanazok az oszlopok és sorok fognak szerepelni, így a többi elemet a csere nem befolyásolja.

Második lépésként az a_{2j_2} és $a_{k_2(n-1)}$ helyett az $a_{2(n-1)}$ és a_{k_22} számokat választjuk. Ezt az eljárást folytatjuk. Látható, hogy a csere a már kiválasztott a_{1n} , $a_{2(n-1)}$ stb. elemeket nem változtatja meg. Így az eljárás végén az a_{1n} , $a_{2(n-1)}$, $a_{3(n-2)}$, $\dots$, $a_{(n-1)2}$, a_{n1} számok fognak szerepelni. Ezek pedig egy számtani sorozatot alkotnak, amelynek az első eleme $n^2 - n + 1$, az elemek száma n , az n -edik elem n (a sorozat differenciája $-n+1$). Így az összeg:

$$\frac{n^2 - n + 1 + n}{2} \cdot n = \frac{n^3 + n}{2}.$$