I. megoldás. Legyen $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=n$, $\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=n-1$, $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=n-2$, ahol n egész szám. Megmutatjuk, hogy a feladat feltételeit (hasonlóság erejéig) legfeljebb egy háromszög elégítheti ki. Tegyük fel ugyanis, hogy az α', β', γ' szögű háromszög is megfelelő, azaz alkalmas k egésszel $\operatorname{ctg}\frac{\alpha'}{2}=k$, $\operatorname{ctg}\frac{\beta'}{2}=k-1$, $\operatorname{ctg}\frac{\gamma'}{2}=k-2$. A háromszögek félszögei a $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ intervallumhoz tartoznak, ott pedig a $\operatorname{ctg}x$ függvény szigorúan monoton fogyó. Ha föltesszük, hogy $k=n$, akkor $\operatorname{ctg}\frac{\alpha'}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ miatt $\alpha'=\alpha$, és ugyanígy $\beta'=\beta$ és $\gamma'=\gamma$. Ha nem ez a helyzet, akkor föltehető, hogy $k>n$. Ekkor viszont $\operatorname{ctg}\frac{\alpha'}{2}>\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ miatt $\alpha'<\alpha$, és $\beta'<\beta$ és $\gamma'<\gamma$, ami lehetetlen.

Elegendő tehát egyetlen olyan háromszöget találni, ami teljesíti a feltételeket. Az ábráról könnyen leolvasható, hogy ilyen az a derékszögű háromszög, amelynek oldalai 3, 4, 5. Ennek legnagyobb szöge $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$.

Filus Tamás (Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn., 9. évf.) megoldása

II. megoldás. Az előző megoldás jelöléseit használjuk. A tangensfüggvényre vonatkozó addíciós képlet szerint

$$\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}},$$

azaz

$$n-1=\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n-2}}{1-\frac{1}{n(n-2)}}=\frac{2(n-1)}{n^2-2n-1},$$

$$n^2-2n-1=2,$$

$$(n-3)(n+1)=0.$$

Mivel egy háromszög bármelyik szögének a fele 0 és $\dfrac{\pi}{2}$ közé esik és az ilyen szögek kotangense pozitív, az egyetlen megoldás $n=3$, tehát a legnagyobb szögre $\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}=1$, vagyis γ derékszög.

Szemjon Viktória (Kárpátalja, Jánosi, Jánosi Középiskola, 11. évf.)