

Az állítás igazolásához megmutatjuk, hogy nincs háromnál több olyan egész szám, amelyet számjegyeinek összegével elosztva 13-at kapunk.

Nézzük meg először, hogy hány jegyűek lehetnek ezek a számok.

Ha egy ilyen szám négyjegyű, akkor értéke legalább 1000, számjegyeinek az összege legfeljebb $9 \cdot 4 = 36$ lehet. Ha a legalább 1000-et elosztjuk legfeljebb 36-tal, akkor 13-nál biztosan nagyobb számot kapunk $\left(\frac{1000}{36} \approx 27,78\right)$. Tehát a szám nem lehet négyjegyű, és értelemszerűen négynél több jegyű sem.

Kétjegyű sem lehet, hiszen a 13-nak mind a hét kétjegyű többszörösét megvizsgálva (13, 26, 39, 52, 65, 78, 91) egyik sem megfelelő. Nyilvánvaló, hogy a keresett szám egyjegyű sem lehet.

Így a szám csak háromjegyű lehet, legyen $\overline{abc}$, ahol $a \neq 0$, $0 \leq b, c \leq 9$.

A feladat feltétele:

$$\frac{100a + 10b + c}{a + b + c} = 13,$$

$$100a + 10b + c = 13a + 13b + 13c, \quad \text{azaz} \quad 29a = b + 4c.$$

Az előbbiek értelmében a jobb oldal legfeljebb $9 + 4 \cdot 9 = 45$. Ezért $29a \leq 45$, azonban a pozitív számjegy, így $a = 1$. Ekkor

$$29 = b + 4c.$$

A c lehetséges tíz értékéhez a b értékét kiszámolva csak a következő három esetben kapunk megfelelő számot:

$$c = 5, \quad b = 9;$$

$$c = 6, \quad b = 5;$$

$$c = 7, \quad b = 1.$$

Három megfelelő $\overline{abc}$ szám van, ezek 117, 156 és 195. Biztos tehát, hogy négyük közül legalább kettőnek ugyanannyi könyve van.

Halbrucker Tamás (Szekszárd, Garay János Gimnázium 10. o.t.)