

I. megoldás. Az e egyenes pontjait tekintve az AB és a CD zárt intervallumok egyesítésén kívüli pontokra $\angle APB = \angle CPD = 0^\circ$, az egyenes további pontjaiból pedig az egyik szakasz 0° , a másik pedig 180° -os szögben látszik, illetve ha P egybeesik valamelyik megadott ponttal, akkor az egyik szög nem értelmezhető. Az e egyenesen tehát az AB és CD zárt szakaszok kivételével minden pont megfelelő (*1. ábra*).

Legyen most $P \notin e$ és tegyük föl, hogy $APB \sphericalangle = CPD \sphericalangle$. A keresett ponthalmaz szimmetrikus az e egyenesre, így elegendő az e által határolt egyik félsíkban vizsgálni a keresett pontokat.

Vizsgáljuk először a „szimmetrikus” esetet, amikor a két szakasz egyenlő, $AB = CD$. Az az eltolás, ami az AB szakaszt a CD -be viszi, az A, B, P pontokon átmenő k kört – ez most létrejön – a C, D pontokon átmenő k' körbe viszi (2. ábra). Ha P képe P' , akkor nyilván $APB \sphericalangle = CP'D \sphericalangle$, ez utóbbi tehát a feltétel szerint egyenlő a $CPD \sphericalangle$ szöggel. Mivel P és P' ugyanabban a félsíkban vannak, azért a látókör mértani hely tulajdonsága miatt P is rajta van a k' körön, a P pont tehát a k és k' körök – egyik – közös pontja.

2. ábra

A k' kört viszont a k tükörképéként is megkapjuk, ha a tükrözés tengelye az AB és CD szakaszok t szimmetria-tengelye. Mivel pedig körnek és tükörképének a közös pontjai – ha vannak – illeszkednek a tükrözés tengelyére, a P pont rajta van a t egyenesen. Az pedig nyilvánvaló, hogy ennek a tengelynek minden pontja hozzátartozik a keresett halmazhoz.

A fenti gondolatmenet alkalmas kiterjesztésével az általános, $AB \neq CD$ esetben is megkapjuk a megoldást. Tekintsük azt a pozitív arányú középpontos hasonlóságot, ami az AB szakaszt a CD -be viszi. (Ha $AB \neq CD$, akkor ilyen létezik, középpontja, O , az e egyenesen van, aránya $\lambda = \frac{CD}{AB}$). Az A, B, P pontokon átmenő k kört ez a hasonlóság a C, D pontokon átmenő k' körbe viszi (3. ábra).

Ha P képe P' , akkor a speciális eset gondolatmenetét követve $APB \sphericalangle = CP'D \sphericalangle$, hiszen a középpontos hasonlóság szögtartó, a feltétel szerint pedig $APB \sphericalangle = CPD \sphericalangle$. Így $CP'D \sphericalangle = CPD \sphericalangle$, P a k' körön is rajta van, a két kör, k és k' a P pontban metszik egymást.

Az O pont választásából $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$, azaz

$$OA \cdot OD = OC \cdot OB,$$

az AB szakaszt tehát a középpontos hasonlóságon kívül az O pólusú,

$$r = \sqrt{OA \cdot OD} = \sqrt{OC \cdot OB}$$

sugarú *inverzió* is a CD szakaszba viszi (4. ábra). Ez az inverzió a k kört egy olyan körbe viszi, ami átmegy a C és D pontokon, továbbá az inverzió pólusa, O hasonlósági centruma a k körnek és a képének. Mindez egyértelműen határozza meg a k' kört, így a k kört a fenti inverzió is a k' -be viszi. Ha pedig egy kör és az inverze metszik egymást, akkor a metszéspont rajta van az inverzió alapkörén. A P pont így rajta van az O középpontú r sugarú k^* körön.

4. ábra

Megmutatjuk, hogy k^* minden pontja hozzátartozik a keresett ponthalmazhoz.

A k^* elválasztja az AB és a CD szakaszokat, így az a két pont, ahol az e egyenest metszi, a mértani helyhez tartozik. Ha P olyan pont a k^* körön, ami nincs rajta az e egyenesen, akkor az A, B, P pontokon átmenő k kört mind az O középpontú $\lambda = \frac{CD}{AB}$ arányú hasonlóság, mind pedig a k^* körre vonatkozó inverzió ugyanabba a k' körbe viszi

(5. ábra). Mivel az inverzió során a P képe önmaga, a P ponton a k' kör is áthalad. Ha pedig a középpontos hasonlóság során a P képe P' , akkor a $APB \sphericalangle = CP'D \sphericalangle$, a kerületi szögek tétele szerint pedig a k' körben $CP'D \sphericalangle = CPD \sphericalangle$. A két egyenlőséget összevetve $APB \sphericalangle = CPD \sphericalangle$ valóban.

5. ábra

II. megoldás. Húzzuk meg a BPC szög belső szögfelezőjét és merte ez az e egyenest a P -től függő M_P pontban.

Nyilvánvaló, hogy $\angle APB = \angle CPD$ pontosan akkor teljesül, ha PM_P felezi az $\angle APD$ szöget is (6. ábra). Ha $AP = PD$, akkor PM_P merőleges az e -re és így $BP = PC$ is teljesül, M_P felezi AD -t és BC -t is, tehát $AB = CD$, az ábra szimmetrikus a PM_P egyenesre, P tehát rajta van a szimmetriatengelyen, amelynek nyilván minden pontja megfelelő.

6. ábra

A továbbiakban tegyük fel, hogy $AB \neq CD$, ami azt jelenti, hogy az $\frac{AP}{PD} = \lambda_1$, illetve a $\frac{BP}{PC} = \lambda_2$ arányok értéke

nem 1. Ez azt jelenti, hogy P rajta van az A és D pontokhoz tartozó λ_1 , illetve a B és C pontokhoz tartozó λ_2 arányú Apollóniusz-féle körön. A szögfelező-tétel szerint mindkét kör áthalad az M_P ponton is, így a körök középpontja rajta van PM_P felező merőlegesén, ami most nem párhuzamos e -vel. Ismeretes, hogy a körök középpontja az e egyenesen is rajta van, ez viszont azt jelenti, hogy a két Apollóniusz-kör középpontja egybeesik, a két kör tehát azonos (7. ábra).

8. ábra

Jelölje a körök közös középpontját O_P . Ismeretes, hogy ha a K, L pontokhoz tartozó $\lambda \neq 1$ arányú Apollóniusz-kör középpontja O , sugara r , akkor $OK \cdot OL = r^2$ (8. ábra). A két kör középpontja és sugara most azonos, így

$$r^2 = O_P A \cdot O_P D = O_P B \cdot O_P C.$$

A kapott egyenlőséget átrendezve $\frac{O_PC}{O_PA} = \frac{O_PD}{O_PB}$, az O_P tehát az a pont az e egyenesen, ahonnan az AB szakaszt a CD -be nagyítható (vagy kicsinyíthető). Ennek a pontnak a helyzete pedig nem függ a P ponttól, csak az AB és CD szakaszok helyzetétől, $O_P = O$ a két szakasz külső hasonlósági pontja. Az $M_P = M$ pont helyzete sem függ tehát P -től és a két egybeeső Apollóniusz-kör sem. Ha tehát $AB \neq CD$ és $APB \sphericalangle = CPD \sphericalangle$, akkor P rajta van az O középpontú $r = \sqrt{OA \cdot OD} = \sqrt{OB \cdot OC}$ sugarú körön, ahol O a két szakasz, AB és CD külső hasonlósági pontja.

A megfordítás most már nyomban adódik az Apollóniusz-féle kör mértani hely tulajdonságából és a szögfelezőtételből. Ha P egy tetszőleges pont a közös Apollóniusz-körön és $P \notin e$ – ami nyilván föltehető – akkor egyrészt $\frac{AP}{PD} = \frac{AM}{MD}$ és így PM felezi az $APD \sphericalangle$ szöget, másfelől ugyanígy $\frac{BP}{PC} = \frac{BM}{MC}$ és így PM felezi a $BPC \sphericalangle$ szöget is. Ebből pedig valóban $APB \sphericalangle = CPD \sphericalangle$ következik.