

I. megoldás. Jelölje a négy kis paralelogramma területét t_a, t_b, t_c, t_d , a nagy paralelogramma területét T .

Tudjuk, hogy a paralelogramma átlója felezi a területét.

Ekkor a háromszögek területeit a „leeső” részek figyelembevételével felírhatjuk így:

$$\begin{aligned}T_{AQR} &= T - \left(\frac{t_c}{2} + \frac{t_a + t_b}{2} + \frac{t_a + t_d}{2} \right); & T_{BRS} &= T - \left(\frac{t_d}{2} + \frac{t_a + t_b}{2} + \frac{t_b + t_c}{2} \right); \\T_{CSP} &= T - \left(\frac{t_a}{2} + \frac{t_c + t_d}{2} + \frac{t_b + t_c}{2} \right); & T_{DPQ} &= T - \left(\frac{t_b}{2} + \frac{t_a + t_d}{2} + \frac{t_c + t_d}{2} \right).\end{aligned}$$

A négy háromszög területének összege:

$$T_{\text{össz}} = 4T - \frac{5(t_a + t_b + t_c + t_d)}{2}.$$

Tudjuk, hogy $T = t_a + t_b + t_c + t_d$. Ennek alapján $T_{\text{össz}} = 4T - \frac{5T}{2} = \frac{3}{2}T = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$.

Tehát a négy háromszög területének összege **3** egység.

Tassy Gergely (Budapest, Veres Péter Gimnázium, 9. o.t.)

II. megoldás. Készítsünk ábrát a példának megfelelően.

Legyen a keresett területösszeg t . A paralelogramma magasságát jelöljük m -mel, annak két részét az *ábra* szerint

m_1 -gyel és m_2 -vel. Írjuk fel az egyes háromszögek területét:

$$T_{AQR} = 2 - \frac{DR \cdot m + AB \cdot m_1 + RC \cdot m_2}{2},$$

$$T_{BRS} = 2 - \frac{RC \cdot m + AB \cdot m_1 + DR \cdot m_2}{2},$$

$$T_{DPQ} = 2 - \frac{AP \cdot m + PB \cdot m_1 + DC \cdot m_2}{2},$$

$$T_{CSP} = 2 - \frac{PB \cdot m + AP \cdot m_1 + DC \cdot m_2}{2}.$$

A területeket összeadva:

$$\begin{aligned} t = 8 - \frac{DR \cdot m + AB \cdot m_1 + RC \cdot m_2}{2} - \frac{RC \cdot m + AB \cdot m_1 + DR \cdot m_2}{2} - \\ - \frac{AP \cdot m + PB \cdot m_1 + DC \cdot m_2}{2} - \frac{PB \cdot m + AP \cdot m_1 + DC \cdot m_2}{2}. \end{aligned}$$

Ezt tovább alakítva:

$$\begin{aligned} 2t &= 16 - m \cdot (DR + RC + AP + PB) - \\ &\quad - m_1 \cdot (AB + AB + PB + AP) - m_2 \cdot (RC + DR + DC + DC), \\ 2t &= 16 - 2m \cdot AB - 3m_1 \cdot AB - 3m_2 \cdot AB = 16 - AB(2m + 3(m_1 + m_2)). \end{aligned}$$

Mivel $AB(2m + 3(m_1 + m_2)) = AB \cdot 5m = 10$, ezért $2t = 6$, és így az AQR , BRS , DQR és CSP háromszögek területének az összege 3 egység.

Kiss-Tóth Christian (Budapest, Árpád Gimnázium, 9. o.t.)