

I. megoldás. Egy csonkagúlát, amelynek alaplappja A , fedőlapja B területű ($B < A$) egészítsünk ki gúlává. A „hozzátett” és a hozzátevással kapott gúlák középpontosan hasonlóak. Ha a csonkagúla magassága m , a teljes gúláé pedig $m+x$, akkor a megfelelő gúlák hasonlóságából $(m+x) : x = \sqrt{A} : \sqrt{B}$, ahonnan $x = m \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A} - \sqrt{B}}$. Ezért a teljes gúla térfogata $V = \frac{m+x}{3}A = \frac{m}{3} \frac{A\sqrt{A}}{\sqrt{A} - \sqrt{B}}$, a csonkagúláé pedig $V \left(1 - \left(\frac{x}{m+x} \right)^3 \right) = V \left(1 - \frac{B\sqrt{B}}{A\sqrt{A}} \right)$.

A csonkagúla kettévágásakor keletkezett „alsó” csonkagúla alaplappja ugyancsak A , fedőlapjának (ismeretlen) területét jelöljük C -vel. Mivel ugyanarra a V térfogatú gúlára egészíthető ki, mint az eredeti csonkagúla, a térfogata az imént levezetett képlet szerint $V \left(1 - \frac{C\sqrt{C}}{A\sqrt{A}} \right)$. A feladat feltétele tehát:

$$1 - \frac{C\sqrt{C}}{A\sqrt{A}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{B\sqrt{B}}{A\sqrt{A}} \right).$$

Rendezve:

$$2A\sqrt{A} - 2C\sqrt{C} = A\sqrt{A} - B\sqrt{B},$$

$$\frac{A\sqrt{A} + B\sqrt{B}}{2} = (\sqrt{C})^3,$$

ennek megoldása pedig

$$C = \left(\frac{A\sqrt{A} + B\sqrt{B}}{2} \right)^{2/3} = \left(\frac{16\sqrt{2} + 1}{2} \right)^{2/3} \approx 5.19 \text{ cm}^2.$$

II. megoldás. Jelölje a csonkagúla térfogatát V , a részek térfogatát V_1 és V_2 , a hozzájuk tartozó magasságokat m_1 és m_2 , a síkmetszet területét x .

A teljes gúla térfogata

$$V = \frac{(m_1 + m_2)}{3}(8 + \sqrt{8} + 1); \quad V_1 = \frac{m_1}{3}(8 + \sqrt{8x} + x); \quad V_2 = \frac{m_2}{3}(x + \sqrt{x} + 1).$$

A térfogatok egyenlőségéből, valamint abból, hogy a $V_1 + V_2 = V$, a térfogatok háromszorosára felírhatjuk:

$$(1) \quad m_1(8 + x + \sqrt{8x}) = m_2(x + \sqrt{x} + 1),$$

$$(2) \quad m_1(8 + x + \sqrt{8x}) + m_2(x + 1 + \sqrt{x}) = (m_1 + m_2)(9 + \sqrt{8}).$$

(1)-ből fejezzük ki m_1 -et:

$$m_1 = \frac{m_2(x + 1 + \sqrt{x})}{8 + x + \sqrt{8x}}.$$

Ezt helyettesítve (2)-be:

$$m_2(x + 1 + \sqrt{x}) + m_2(x + 1 + \sqrt{x}) = \left[\frac{m_2(x + 1 + \sqrt{x})}{8 + x + \sqrt{8x}} + m_2 \right] (9 + \sqrt{8}).$$

Végezzük el a kijelölt műveleteket és egyszerűsítsünk $m_2 \neq 0$ -val, valamint vezessük be a $\sqrt{x} = a$ új ismeretlent. Ekkor a következő negyedfokú egyenlethez jutunk:

$$2a^4 + (2 + 4\sqrt{2})a^3 - (1 + 16\sqrt{2})a - (65 + 18\sqrt{2}) = 0.$$

Az első 2 tagból kiemelhetjük a $2a^3$ -t, kapjuk, hogy

$$2a^3(a + 1 + 2\sqrt{2}) - (1 + 16\sqrt{2})a - (65 + 18\sqrt{2}) = 0.$$

Nézzük meg, hogy $(a + 1 + 2\sqrt{2})$ osztója-e az egyenletben szereplő másik két tag összegének, azaz létezik-e olyan c szám, amelyre a

$$c(a + 1 + 2\sqrt{2}) = (16\sqrt{2} + 1)a + 65 + 18\sqrt{2}$$

egyenlőség teljesül. Az együtthatók egyenlőségéből következik, hogy

$$ca = (16\sqrt{2} + 1)a.$$

Ez $c = 16\sqrt{2} + 1$ választással teljesül, és valóban

$$(16\sqrt{2} + 1)(2\sqrt{2} + 1) = 64 + 16\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 1 = 65 + 18\sqrt{2}.$$

Így a polinom szorzattá alakítható: $(2a^3 - 1 - 16\sqrt{2})(a + 1 + 2\sqrt{2})$. A második tényező egyetlen gyöke negatív, ami nem lehetséges ($a = \sqrt{x}$). Az első tényező egyetlen valós gyöke $a = \sqrt[3]{\frac{1 + 16\sqrt{2}}{2}} \approx 2,27752$, azaz a síkmetszet területe $x = a^2 \approx 5,187 \text{ cm}^2$.

Megjegyzés. A feladat valójában – ahogy az a megoldásokból is kiderül – nem feltétlenül csomagtárolókról, hanem általában „csomagtárolószerű” testekről szólt; csak az számított a végeredmény szempontjából, hogy az alap- és a fedőlapnak mekkora a területe, alakjuk viszont közömbös. Ezért nem tekintettük hibásnak azokat a megoldásokat sem, amelyek csomagtároló helyett csomagtárolóval számoltak.