

Az állítás nem igaz. Sok ellenpélda konstruálható, ezek közül kettőt írunk le. A második azt is mutatja, hogy nagyságrendileg legalább n^2 kék pontra van szükségünk ahhoz, hogy a térben n piros pont által meghatározott minden tetraéder belsejében legyen közülük legalább egy.

I. ellenpélda. Legyenek a piros pontok a következők: egy $ABCD$ négyzet négy csúcsa, valamint a négyzet középpontjából induló, a négyzet síkjára merőleges f félegyenés kezdőpontjától különböző $P_1, P_2, \dots, P_{n-4}$ pontjai (a számozást válasszuk úgy, hogy minél nagyobb egy pont indexe, annál távolabb van a négyzet síkjától, lásd az 1. ábrát). Ekkor az ABP_iP_{i+1} , BCP_iP_{i+1} , CDP_iP_{i+1} , DAP_iP_{i+1} ($i = 1, 2, \dots, n-5$) olyan tetraéderek, melyeknek nincs közös belső pontjuk. E tetraéderek száma $4(n-5)$, azaz legalább $4n-20$ kék pont kell ahhoz, hogy a piros pontok által meghatározott minden tetraéder belsejében legyen közülük legalább egy. Ez a szám viszont nagyobb, mint $3n$, ha $n > 20$.

Nyeste Szabolcs (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

1. ábra

2. ábra

II. ellenpélda. Legyen $n = 2k$. A piros pontok legyenek az e és f kitérő egyenesek $E_1, E_2, \dots, E_k$ és $F_1, F_2, \dots, F_k$ pontjai, ahol a pontok az indexeiknek megfelelő sorrendben helyezkednek el az egyeneseken (lásd a 2. ábrát). Ekkor $1 \leq i, j \leq k - 1$ esetén az $E_i E_{i+1} F_j F_{j+1}$ tetraéderek közül semelyik kettőnek nincs közös pontja. Legyen ugyanis $E_i E_{i+1} F_j F_{j+1}$ és $E_{i'} E_{i'+1} F_{j'} F_{j'+1}$ két különböző ilyen típusú tetraéder. Feltéhetjük, hogy $i < i'$. Ekkor az E_{i+1} pont és az f egyenes által meghatározott S síknak a két tetraéder E_i illetve $E_{i'+1}$ csúcsai különböző oldalára esnek, E_{i+1} ,

$F_j, F_{j+1}, F_{j'}, F_{j'+1}$ S -en vannak, $E_{i'}$ pedig vagy S -en van, vagy ugyanarra az oldalára esik S -nek, mint $E_{i'+1}$. Tehát S elválasztja egymástól a két tetraéder belső pontjait. Az ilyen típusú tetraéderek száma $(k-1)^2 = \left(\frac{n}{2}-1\right)^2$, ami $n \geq 16$ esetén nagyobb, mint $3n$.