

I. megoldás. A binomiális tétel szerint

$$(1 + \sqrt{3})^{2n} = \sum_{i \text{ páros}} \binom{2n}{i} (\sqrt{3})^i + \sum_{i \text{ páratlan}} \binom{2n}{i} (\sqrt{3})^i,$$

illetve

$$(1 - \sqrt{3})^{2n} = \sum_{i \text{ páros}} \binom{2n}{i} (\sqrt{3})^i - \sum_{i \text{ páratlan}} \binom{2n}{i} (\sqrt{3})^i.$$

A bizonyítandó állításban szereplő összeg így éppen

$$a_n = \frac{1}{2} \left[(1 + \sqrt{3})^{2n} + (1 - \sqrt{3})^{2n} \right].$$

Vegyük észre másfelől, hogy

$$(1 + \sqrt{3})^{2n} = \left[(1 + \sqrt{3})^2 \right]^n = (4 + 2\sqrt{3})^n = 2^n (2 + \sqrt{3})^n$$

és ugyanígy $(1 - \sqrt{3})^{2n} = 2^n (2 - \sqrt{3})^n$.

Eszerint $a_n = 2^{n-1} \left[(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n \right]$, így elegendő igazolnunk, hogy $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ páros szám.

Ez ismét a binomiális tételből következik: a két kifejtésben a $\sqrt{3}$ páros kitevőjű hatványait tartalmazó tagok értéke egyenlő, a páratlan kitevőjű hatványokat tartalmazó tagok pedig egymás ellentettjei. Eszerint

$$(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n = 2 \sum_{i \text{ páros}} \binom{n}{i} (\sqrt{3})^i 2^{n-i}.$$

Mivel $(\sqrt{3})^i$ egész, ha i páros, ezért $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ egy egész szám kétszerese, tehát valóban páros.

Kevei Péter (Szeged, Radnóti Miklós Gimn., 12. évf.)

Megjegyzés. A megoldás során valójában az alábbi azonosságot alkalmaztuk két alkalommal:

$$(a + b)^n + (a - b)^n = 2 \sum_{i \text{ páros}} \binom{n}{i} b^i a^{n-i}.$$

II. megoldás. Az első megoldáshoz hasonlóan indulva az alapvető észrevétel ismét az, hogy a feladatban szereplő összeg,

$$a_n = \binom{2n}{0} + \binom{2n}{2} 3 + \cdots + \binom{2n}{2n} 3^n$$

az $(1 + \sqrt{3})^{2n}$ binomiális kifejtésének „racionális része”, $(1 + \sqrt{3})^{2n} = a_n + b_n \sqrt{3}$, ahol b_n is egész szám.

Másfelől $(1 + \sqrt{3})^{2n} = (4 + 2\sqrt{3})^n = 2^n (2 + \sqrt{3})^n$. Ismét a binomiális tétel szerint

$$(2 + \sqrt{3})^n = c_n + d_n \sqrt{3},$$

ahol c_n és d_n is egész számok. A két kifejtés egyenlőségéből:

$$a_n + b_n \sqrt{3} = 2^n \cdot c_n + 2^n \cdot d_n \sqrt{3}.$$

A bizonyítandó állítás, $2^n \mid a_n$, most már következik abból, hogy ha egy valós szám felírható $p + q\sqrt{3}$ alakban, ahol p és q racionális számok, akkor ez a felírás egyértelmű. Ekkor ugyanis $a_n = 2^n c_n$, ahol c_n egész.

Az egyértelműség bizonyításához legyen $p_1 + q_1 \sqrt{3} = p_2 + q_2 \sqrt{3}$, $p_i, q_i \in \mathbb{Q}$. Rendezés után

$$p_1 - p_2 = (q_2 - q_1) \sqrt{3}.$$

Ha $q_1 \neq q_2$, akkor a bal oldalon egy racionális, a jobb oldalon pedig egy irracionális szám áll, ami nem lehetséges. Így $q_1 = q_2$ és akkor persze $p_1 = p_2$.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzések. 1. A feladat állítását sokan teljes indukcióval bizonyították, felhasználva a binomiális együtthatók között fennálló $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ alapvető összefüggést. A bizonyításhoz így szükség volt egy másik oszthatóság kimondására és párhuzamos bizonyítására:

$$2^n \mid \binom{2n}{1} + \binom{2n}{3} + \dots + \binom{2n}{2i+1} 3^i + \dots + \binom{2n}{2n-1} 3^{n-1}.$$

Kocsis Albert Tihamér (Budapest, Fazekas Mihály Gimnázium, 10. évf.) megoldásából kiderül a két mennyiség közti kapcsolat.

Bevezetve az $a_n = \sum_{i=0}^n \binom{2n}{2i} 3^i$ és a $b_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{2n}{2i+1} 3^i$ mennyiségeket

$$(1 + \sqrt{3})^{2n} = a_n + b_n \sqrt{3}$$

és a II. megoldásban látottak értelmében ez a felírás egyértelmű.

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{3})^{2n+2} &= (1 + \sqrt{3})^2 (1 + \sqrt{3})^{2n} = (4 + 2\sqrt{3})(a_n + b_n \sqrt{3}) = \\ &= (4a_n + 6b_n) + (4b_n + 2a_n)\sqrt{3}. \end{aligned}$$

A hivatkozott egyértelműség miatt $a_{n+1} = 4a_n + 6b_n$ és $b_{n+1} = 4b_n + 2a_n$. Mivel $(\sqrt{3} + 1)^2 = 4 + 2\sqrt{3}$, $a_1 = 4$ és $b_1 = 2$, így innen és a kapott rekurziókból teljes indukcióval nyomban adódik, hogy $2^n \mid a_n$ és a bizonyításhoz ugyancsak szükséges $2^n \mid b_n$.

2. Érdekes utat választott Rácz Béla András (Budapest, Fazekas Mihály Gimnázium, 10. évf.). A vizsgált összegnek az I. megoldásból ismert „szimmetrikus alakját” felírva:

$$\sum_{i=0}^n \binom{2n}{2i} 3^i = \frac{(1 + \sqrt{3})^{2n} + (1 - \sqrt{3})^{2n}}{2}$$

bevezette az

$$e_k = \frac{(1 + \sqrt{3})^k + (1 - \sqrt{3})^k}{2}$$

sorozatot. Maga a sorozat egy másodrendű lineáris rekurzió: $e_{k+2} = t \cdot e_{k+1} + s \cdot e_k$ explicit alakja. Ezt tudva magát a rekurziót is könnyű megtalálni. Az együtthatók: $t = s = 2$ és így

$$(*) \quad e_{k+2} = 2e_{k+1} + 2e_k.$$

Mivel $e_0 = e_1 = 1$, azért a $(*)$ rekurziót felhasználva teljes indukcióval közvetlenül adódik, hogy ha $k \geq 2m$, akkor $2^m \mid e_k$. Ha $k = 2n = 2m$, akkor éppen a feladat állítását kapjuk.