

A feladat megoldásai során az e szám 130–138. oldalain megtalálható „*Amit jó tudni a háromszögekről*” című cikkben szereplő jelöléseket és eredményeket használjuk.

1. ábra

I. megoldás. Az $O_aO_bO_c$ háromszög területe megegyezik az ABC , O_aBC , O_bCA és O_cAB háromszögek terüle-

tének összegével (1. ábra). Ezért azt kell megmutatnunk, hogy

$$T + \frac{a \cdot r_a}{2} + \frac{b \cdot r_b}{2} + \frac{c \cdot r_c}{2} \geq 4T.$$

Ezt rendezve és a 8. állítást felhasználva a bizonyítandó egyenlőtlenség:

$$a \cdot \frac{T}{s-a} + b \cdot \frac{T}{s-b} + c \cdot \frac{T}{s-c} \geq 6T, \quad \text{azaz} \quad \frac{a}{s-a} + \frac{b}{s-b} + \frac{c}{s-c} \geq 6.$$

Mivel $\frac{a}{s-a} = \frac{s}{s-a} - 1$, $\frac{b}{s-b} = \frac{s}{s-b} - 1$ és $\frac{c}{s-c} = \frac{s}{s-c} - 1$, elég azt megmutatni, hogy

$$\frac{s}{s-a} + \frac{s}{s-b} + \frac{s}{s-c} \geq 9,$$

illetve hogy az ennek átrendezésével kapott

$$\frac{\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c}}{3} \geq \frac{3}{s}$$

egyenlőtlenség fennáll. Ez utóbbi viszont következik a számtani és a harmonikus közepek közti egyenlőtlenségből, mert aszerint:

$$\frac{3}{\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c}} \leq \frac{(s-a) + (s-b) + (s-c)}{3} = \frac{s}{3}.$$

Sásdy Gabriella (Szentendre, Ferences Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

II. megoldás. Írjuk fel az $O_a O_b O_c$ háromszög területét ugyanúgy, mint az I. megoldásban:

$$T_{O_a O_b O_c} = s \cdot r + \frac{a \cdot r_a}{2} + \frac{b \cdot r_b}{2} + \frac{c \cdot r_c}{2}.$$

A 8. állításból következik, hogy $s \cdot r = (s-a)r_a$, azaz $a \cdot r_a = s \cdot r_a - s \cdot r$. Ezért $2T_{O_a O_b O_c} = sr + (sr_a - sr) + (sr_b - sr) + (sr_c - sr) = s(r_a + r_b + r_c - r)$. Vagyis a 10. állítást felhasználva: $2T_{O_a O_b O_c} = s \cdot 4R$, azaz $T_{O_a O_b O_c} = 2Rs$. A 12. állítás szerint $R \geq 2r$, tehát $T_{O_a O_b O_c} = 2 \cdot R \cdot s \geq 2 \cdot 2 \cdot r \cdot s = 4T$, ami éppen a bizonyítandó állítás.

Rácz Judit (Szekszárd, Garay J. Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

III. megoldás. Az 5. állítás szerint az $O_a O_b O_c$ háromszög szögei $\frac{\alpha + \beta}{2}$, $\frac{\beta + \gamma}{2}$ és $\frac{\gamma + \alpha}{2}$, a 7. következmény szerint pedig az e háromszög köré írható kör sugara $2R$. Ezért a 3. állítás alapján

$$T_{O_a O_b O_c} = 2 \cdot (2R)^2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \cdot \sin \frac{\gamma + \alpha}{2}.$$

Mivel $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, ezért $\frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$, $\frac{\beta + \gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ és $\frac{\gamma + \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$, tehát $\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \cdot \sin \frac{\gamma + \alpha}{2} = \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}$. Vagyis a 17. állítás utolsó része szerint $T_{O_a O_b O_c} = 8R^2 \cdot \frac{s \cdot T}{abc}$.

Elegendő tehát megmutatnunk, hogy $\frac{8R^2 \cdot s}{abc} \geq 4$, vagyis a 2. állítást használva azt, hogy $\frac{abc \cdot s}{2T^2} \geq 4$. Ez viszont éppen a 18. állítás bizonyítása során már belátott $\frac{T^2}{s \cdot abc} \leq \frac{1}{8}$ egyenlőtlenség egy átrendezett alakja.