

Jelölje a feladatban megadott kétváltozós polinomot $f(t, s)$. Ez mindkét változójában másodfokú; rendezzük az egyik változó, például a t hatványai szerint:

$$f(t, s) = 6t^2 - (4s + 8)t + 3s^2 + 6s + 5.$$

Alakítsuk ezt t szerint teljes négyzetté:

$$f(t, s) = 6 \left(t - \frac{s+2}{3} \right)^2 + \frac{7}{3}s^2 + \frac{10}{3}s + \frac{7}{3}.$$

Innen kiolvasható, hogy az s rögzített értékére $f(t, s)$ legkisebb értéke $\frac{7}{3}s^2 + \frac{10}{3}s + \frac{7}{3}$, amit akkor vesz föl, ha $t = \frac{s+2}{3}$. Ennek a minimumnak a legkisebb értéke szintén teljes négyzetté alakítással kapható meg:

$$\frac{7}{3}s^2 + \frac{10}{3}s + \frac{7}{3} = \frac{7}{3} \left(s + \frac{5}{7} \right)^2 + \frac{8}{7}.$$

A legkisebb minimum tehát $\frac{8}{7}$, amit akkor kapunk, ha $s = -\frac{5}{7}$. Ebben az esetben $t = \frac{s+2}{3} = \frac{3}{7}$.

Az $f(s, t)$ legkisebb értéke tehát $\frac{8}{7}$, amit a változók $t = \frac{3}{7}$, $s = -\frac{5}{7}$ értékeire vesz föl.

Barcza Zsófia (Bonyhád, Petőfi Sándor Evangélikus Gimnázium, 9. évf.)

Megjegyzések. 1. Hasonlóan jutunk eredményre, ha előbb az s , majd a t szerint alakítunk teljes négyzetté. Ekkor az

$$f(s, t) = 3 \left(s - \frac{2}{3}t + 1 \right)^2 + \frac{14}{3} \left(t - \frac{3}{7} \right)^2 + \frac{8}{7}$$

alakot kapjuk, ahonnan szintén látható, hogy a minimum értéke $\frac{8}{7}$, amit akkor vesz föl, ha $t - \frac{3}{7} = s - \frac{2}{3}t = 0$, azaz $t = \frac{3}{7}$ és $s = -\frac{5}{7}$.

2. Az $f(s, t) = 6 \left(t - \frac{s+2}{3} \right)^2 + \frac{7}{3} \left(s + \frac{5}{7} \right)^2 + \frac{8}{7}$ alakból is látható, hogy az (s, t) koordináta-rendszerben $f(s, t) = c$ egy ellipszis egyenlete, ha $c > \frac{8}{7}$. Ha $c = \frac{8}{7}$, akkor az ellipszis egyetlen ponttá zsugorodik, ennek a koordinátái a minimumot szolgáltató értékek: $t = \frac{3}{7}$ és $s = -\frac{5}{7}$. Eredményünkéből az is adódik, hogy ha $c < \frac{8}{7}$, akkor nincs olyan pont, melynek (s, t) koordinátáira $f(s, t) = c$ teljesülne.