

I. megoldás. Ha P a négyzet AB vagy CD oldalegyenesén van, akkor a feltétel nyilván nem teljesül. Ha tehát $\sin \angle APB = \sin \angle DPC$, akkor létezik az A, B, P pontokon átmenő k_1 és a C, D, P pontokon átmenő k_2 kör. Ezekben a körökben AB és CD egyenlő vagy kiegészítő kerületi szögekkel szemközti húrok. Mivel a négyzet oldalai, ezért egyenlők, így a k_1 és k_2 körök egybevágók.

Megfordítva, ha P két egybevágó kör közös pontja, amelyek egyike A -n és B -n, a másik pedig C -n és D -n megy át, akkor az $\angle APB$ és $\angle DPC$ egyenlők, vagy pedig 180° -ra egészítik ki egymást, tehát $\sin \angle APB = \sin \angle DPC$. A szóban forgó mértani hely tehát az AB -n illetve a CD -n átmenő egybevágó körpárok közös pontjaiként adódik.

Tekintsünk tehát egy tetszőleges k_1 kört, amelyik átmege az A és B pontokon. A C és D pontokon ekkor két olyan kör megy át, amelyik egybevágó a k_1 -gyel: a k_1 tükörképe az AD és BC f felező merőlegesére, illetve az a kör, amelyet úgy kapunk, ha k_1 -et eltoljuk az $\vec{AD} = \vec{BC}$ vektorral. (Az AB szakaszt mindkét transzformáció a CD -be viszi.) Jelöljük a tükrözéssel kapott kört k_{21} -gyel, az eltoltat pedig k_{22} -vel. (Ha k_1 éppen az AB átmérőjű kör, akkor $k_{21} = k_{22}$.)

1. eset: k_1 és k_{21} közös pontjai.

Ha a két kör, k_1 és k_{21} nem esik egybe, akkor legfeljebb két közös pontjuk van. Ezek – ha létrejönnek – rajta vannak a tükrözés tengelyén. Így az f egyenes pontjait kapjuk, és ennek nyilván minden pontja előáll az f -re tükrös ABP illetve DCP pontokon átmenő egybevágó körök metszéspontjaként. (Ilyen P pontokra egyébként az APB és a DPC szögtartományok is tükrösek az f -re, így a szinuszuk egyenlő.) (1.a., 1.b. ábrák.)

1.a. ábra

1.b. ábra

Ha k_1 és k_{21} azonosak, akkor $k_1 = k_{21}$ a négyzet körülírt köre. A fentiek szerint ennek a körnek a négyzet csúcsaitól különböző valamennyi pontja a mértani helyhez tartozik (2.a., 2.b. ábrák). A megfordítás most is közvetlenül leolvasható: a P bármely helyzetében negyed- vagy háromnegyed körívnyi kerületi szögek adódnak. Ha P az $\widehat{AB}$ vagy a $\widehat{CD}$ íven van, akkor az egyik szög 45° , a másik pedig 135° , míg a $\widehat{BC}$ vagy a $\widehat{DA}$ íven mindkét szög 45° -os.

2.a. ábra

2.b. ábra

2. eset: k_1 és k_{22} közös pontjai.

3.a. ábra

3.b. ábra

A két kör és a négyzet közös szimmetriatengelye az AB felező merőlegese, így a létrejövő két metszéspont közül azt vizsgáljuk, amelyik a B , C pontokkal azonos félsíkban van (3.a., 3.b. ábrák). A k_{22} kört a k_1 eltoltjaként kaptuk, így ha a P -n keresztül párhuzamost húzunk BC -vel, akkor ez a k_1 kört abban a Q pontban metszi, amelyre $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{BC}$, az eltolás során éppen a Q pont képe a P . Az eltolás így a k_1 kör $\widehat{QB}$ ívét a k_{22} kör $\widehat{PC}$ ívébe viszi. Mivel pedig egybevágó körökben egyenlő ívekhez egyenlő kerületi szögek tartoznak, a k_{22} -beli $\angle PDC$ és a k_1 -beli $\angle QPB$ egyenlő.

A $PQBC$ paralelogrammában pedig $QPB\angle = CBP\angle$. A két eredményt egybevetve

$$PDC\angle = CBP\angle,$$

a P pont rajta van a négyzet AC átlóján. (A körök másik metszéspontja az AC átló centrálisra vonatkozó tükörképén, a BD átlón van.)

Megfordítva, az átlók minden pontjára fennáll a szóban forgó egyenlőség. Ha P az AC átló pontja (4.a., 4.b. ábrák), akkor $\angle DPC = \angle CPB$. Mivel A , C és P egy egyenesen vannak, külső P pontra $\angle CPB = \angle APB$ (4.a. ábra), belső P pontra pedig $\angle CPB = 180^\circ - \angle APB$.

5. ábra

Ezzel minden esetet megvizsgáltunk, a mértani hely a négyzet f szimmetriatengelye, valamint a körülírt kör, továbbá a két átló egyenese a négyzet csúcsainak a kivételével (5. ábra).

Megjegyzés. Az egybevágó k_1 és k_{21} illetve k_1 és k_{22} körök metszéspontjainak a vizsgálata koordináta geometriai eszközökkel is történhet. Így okoskodott *Ta Vinh Tong*, a budapesti Fazekas Mihály Gimnázium 11. osztályos tanulója. A most következő megoldás teljes egészében koordináta geometriai eszközökkel oldja meg a feladatot.

II. megoldás. Válasszuk a négyzet oldalát 2 egységnyi-nek és helyezzük el egy derékszögű koordináta rendszerben úgy, hogy a csúcsok koordinátái legyenek $A(-1; -1)$, $B(1; -1)$, $C(1; 1)$, $D(-1; 1)$.

Ha $P(x, y)$ tetszőleges pont, akkor a P távolsága az AB egyenestől $|y+1|$, a CD egyenestől pedig $|y-1|$. Ha P különbözik az A és B pontoktól, akkor az esetleg elfajuló ABP háromszög területét kétféleképpen fölírva a távolságformula felhasználásával $\sin APB \triangleleft$ kifejezhető:

$$2T_{APB} = AP \cdot BP \cdot \sin APB \triangleleft = AB \cdot |y+1|,$$

$$\sin APB = \frac{2|y+1|}{\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} \cdot \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}}$$

és ugyanígy

$$\sin DPC = \frac{2|y-1|}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \cdot \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}}$$

Ha P különbözik a négyzet csúcsaitól – ellenkező esetben a szögek valamelyike nem értelmezhető – akkor a fenti kifejezésekben a nevezők értéke nem nulla. A mértani hely egyenlete így

$$(1) \quad \frac{2|y+1|}{\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} \cdot \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}} =$$

$$= \frac{2|y-1|}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \cdot \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}}.$$

Emeljük négyzetre (1) két oldalát. Ilyen lépéssel a megoldáshalmaz általában bővül, most azonban nem ez a helyzet. A négyzetre emeléssel kapott egyenlet ugyanis most olyan P pontok megjelenését eredményezi, amelyekre

$$\sin APB \triangleleft = -\sin DPC \triangleleft.$$

Ez azt jelenti, hogy a feladat természetes értelmezése szerint konvex APB és DPC szögtartományok mellett az őket 360° -ra kiegészítő konkáv szögtartományok is megjelennek. Ezek körében a $|\sin APB \triangleleft| = |\sin DPC \triangleleft|$ feltétel ekvivalens a megfelelő konvex szögekre vonatkozó $\sin APB \triangleleft = \sin DPC \triangleleft$ feltétellel.

Az $(x+1)^2 = a$, $(x-1)^2 = b$, $(y+1)^2 = c$, $(y-1)^2 = d$ mennyiségek bevezetésével (1) a négyzetre emelés után így alakul:

$$\frac{4c}{(a+c)(b+c)} = \frac{4d}{(a+d)(b+d)}.$$

Innen

$$c(a+d)(b+d) = d(a+c)(b+c).$$

Az egyenlőség két oldala a változók $c \leftrightarrow d$ cseréjére fölcserélődik, ami azt jelenti, hogy a két oldal különbségéből $(c-d)$ kiemelhető. Valóban beszorzás és rendezés után

$$\mathbf{cab} - \mathbf{dab} + \mathbf{cad} - \mathbf{dac} + \mathbf{cdb} - \mathbf{dcb} + \mathbf{cd}^2 - \mathbf{dc}^2 = (c-d)(ab-cd) = 0.$$

Visszahelyettesítve:

$$c-d = (y+1)^2 - (y-1)^2 = 4y$$

$$ab-cd = (x^2-1)^2 - (y^2-1)^2 = (x^2-y^2)(x^2+y^2-2),$$

a négyzet csúcsaival bővített ponthalmaz egyenlete:

$$y(x^2-y^2)(x^2+y^2-2) = 0.$$

$y=0$ az x tengely egyenlete, ez a négyzet AD -t és BC -t felező szimmetriatengelye. $x^2-y^2=0$ metsző egyenespár, a négyzet két átlójának az egyenlete, végül $x^2+y^2-2=0$ a négyzet körülírt körének az egyenlete.

A bizonyításból következik, hogy a négyzet csúcsaitól eltekintve valamennyi pontra teljesül a $\sin APB \triangleleft = \sin DPC \triangleleft$ feltétel. Ez egyébként közvetlenül is könnyen igazolható a talált pontokra.

A keresett mértani hely így a négyzet BC -re merőleges szimmetriatengelye, a négyzet átlóegyenesei és a négyzet körülírt köre a négy csúcs, A , B , C , D kivételével (5. ábra).