

Jelöljük a félkör középpontját O -val, sugarát r -rel, az érintési pontot pedig T -vel. Két esetet különböztetünk meg.

I. eset: $AE < AF$ (1. ábra). Mivel

$$\angle OBT = 30^\circ \quad \text{és} \quad \angle OTB = 90^\circ,$$

azért $OB = 2OT = 2r$, azaz $FB = OB - OF = r$.

Tudjuk továbbá, hogy

$$r = \frac{EF}{2} = \frac{1}{2}(AB - AE - BF) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right).$$

Ekkor tehát

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right), \quad \text{azaz} \quad nm - m - 3n = 0.$$

Ezt átalakítva $(n-1)(m-3) = 3$ adódik. Mivel n és m egészek, a 3 pedig csak négyféleképpen írható fel két egész szám szorzataként, azért csak az alábbi táblázatban szereplő értékek jöhetnek szóba:

$n-1$	1	3	-1	-3
$m-3$	3	1	-3	-1
n	2	4	0	-2
m	6	4	0	2

Ezek közül csak az $m = 6$, $n = 2$ és az $m = n = 4$ párok esetén lesz m is és n is pozitív, ezek adják a feladat megoldását.

Ha az AC átló is érinti a félkört, mégpedig az L pontban, akkor az AOL háromszög egyenlő szárú és derékszögű (2. ábra), ezért $AO = r \cdot \sqrt{2}$. De $AO = AE + EO$ és $AE = \frac{1}{n}$, $EO = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) = r$ racionális számok, $r \cdot \sqrt{2}$ pedig irracionális. Ezért AC egyik esetben sem érinti a félkört.

II. eset: $AE > AF$ (3. ábra). Az előző esethez hasonló módon kapjuk, hogy $BE = r$,

$$r = \frac{EF}{2} = \frac{1}{2}(AE + BF - AB) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} - 1 \right)$$

és $BE = AB - AE = 1 - \frac{1}{n}$. Tehát $1 - \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} - 1 \right)$, azaz $3mn - 3m - n = 0$. Ezt átalakítva $(3m-1)(n-1) = 1$ adódik, azaz $3m-1 = \pm 1$, amiből következik, hogy ebben az esetben nincs pozitív egészekből álló megoldás.

Tehát m és n kétféle értéket vehet fel: vagy $m = 6$ és $n = 2$, vagy pedig $m = n = 4$. Az AC átló egyik esetben sem érinti a félkört.

Dömötör Csilla (Győr, Révai M. Gimn., 11. évf.)