I. megoldás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$ számok páronként különböző maradékot adnak $(n+k)$-val osztva. Tekintsük a következő $n+k$ különböző számot:

$$b_1 = a_1, \qquad b_2 = a_1, \qquad b_3 = a_1 + a_2 b_{3i+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2i} + a_{2i+1} \qquad (0 < i < k), \qquad b_{3i+2} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2i} + a_{2i}$$

Ha ezek között van olyan, amelyik osztható $(n+k)$-val, akkor mar készen is vagyunk. Ellenkező esetben pedig van a számok között kettő, mondjuk b_s és b_t $(s < t)$ amelyik ugyanolyan maradékot ad $(n+k)$-val osztva. Ekkor $b_t - b_s$ nyilván osztható $(n+k)$-val. Azt kell már csak észrevennünk, hogy ez a különbség felírható az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok közül néhánynak az összegeként. Ha ugyanis ez nem így lenne, akkor valamilyen k-nál kisebb i-re $s = 3i+1$ és $t = 3i+2$, vagyis $b_t - b_s = a_{2i+2} - a_{2i+1}$ volna. Ez azonban feltételezésünk értelmében nem osztható $(n+k)$-val.

II. megoldás. Ugyanehhez a végeredményhez egy kissé eltérő kiindulással is eljuthatunk.

Állítás. *Tetszőleges $b_1, b_2, \ldots, b_N$ egész számok esetén léteznek olyan $1 \le i \le j \le N$ indexek, hogy a $b_i + b_{i+1} + \ldots + b_j$ összeg osztható N-nel.*

Ez egyébként éppen a feladat állítása a $k = 0$ esetben. A bizonyításhoz tekintsük $t = 0, 1, \ldots, N$ esetén az $s_t = b_1 + \ldots + b_t$ összegeket, ahol $s_0 = 0$ az üres összeg. Az így felírt $N+1$ egész szám között biztosan van kettő, amelyik ugyanolyan maradékot ad N-nel osztva. Ha s_k és s_ℓ $(0 \le k < \ell \le N)$ két ilyen összeg, akkor $s_\ell - s_k = b_{k+1} + b_{k+2} + \ldots + b_\ell$ osztható N-nel.

A feladatot ezután a következő módon vezethetjük vissza erre a speciális esetre. Az első megoldáshoz hasonlóan, most is feltehetjük, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$ számok páronként különböző maradékot adnak $(n+k)$-val osztva. Tekintsük a

$$b_1 = a_1,\ b_2 = a_2 - a_1,\ b_3 = a_1,\ b_4 = a_3,\ b_5 = a_4 - a_3,\ b_6 = a_3,\ \ldots,\ b_{3k} = a_{2k-1},$$
$$b_{3k+1} = a_{2k+1},\quad b_{3k+2} = a_{2k+2},\quad \ldots,\quad b_{n+k} = a_n$$

számokat. Így éppen $N = n+k$ egész számot írtunk fel.

A fenti állítás értelmében léteznek olyan $1 \le i \le j \le N$ indexek, hogy $S = b_i + b_{i+1} + \ldots + b_j$ osztható N-nel. Elegendő azt megmutatni, hogy S felírható az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok közül néhánynak az összegeként. Ez egészen nyilvánvaló akkor, ha $i \ge 3k+1$, ebben az esetben ugyanis

$$S = a_{i-k} + a_{i-k+1} + \ldots + a_{j-k}.$$

Ha $i \le 3k < j$, akkor legyen $i = 3s + q$, ahol $0 \le s < k$ és $1 \le q \le 3$. Ekkor nyilván

$$S = A + a_{2s+3} + a_{2s+4} + \ldots + a_{j-k},$$

ahol $A = a_{2s+1} + a_{2s+2}$, a_{2s+2}, vagy a_{2s+1} annak megfelelően, hogy q értéke 1, 2, vagy pedig 3.

Végül $j \le 3k$ esetén legyen $i = 3s + q$, $j = 3t + r$, ahol $0 \le s \le t < k$ és $1 \le q,\ r \le 3$. Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy

$$S = A + a_{2s+3} + a_{2s+4} + \ldots + a_{2t} + B,$$

ahol A-t ugyanúgy definiáljuk, mint az előző esetben, B értéke pedig a_{2t+1}, a_{2t+2}, vagy pedig e kettő összege aszerint, hogy $r = 1$, 2, vagy 3, feltéve, hogy $s \ne t$. Ha $s = t$, akkor is könnyen látható, hogy S értéke $a_{2s+1} + a_{2s+2}$, a_{2s+2}, vagy a_{2s+1}. Kivételt képezne az az egyetlen esetet, amikor $s = t$ és $q = r = 2$. Ez azonban nem fordulhat elő, hiszen ekkor $S = a_{2s+2} - a_{2s+1}$ lenne, az $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$ számok közül viszont semelyik kettő különbsége nem osztható N-nel.

III. megoldás. (*Kovács Erika Renáta* megoldása.) Ismét tegyük fel, hogy az $a_1, \ldots, a_{2k}$ számok páronként különböző maradékot adnak $(n+k)$-val osztva. Vezessük be az $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{2k}\}$ jelölést, és legyen $b_1 = a_1$. Ha valamilyen $1 < j \le k+1$ esetén a $b_1, b_2, \ldots, b_{j-1}$ számokat már definiáltuk, akkor legyen b_j az A halmaznak egy olyan eleme, amelyik a $b_1, b_2, \ldots, b_{j-1}, b_1 + b_2, b_1 + b_2 + b_3, \ldots, b_1 + b_2 + \ldots + b_{j-1}$ számok egyikével sem ad azonos maradékot $(n+k)$-val osztva. Ilyen szám valóban létezik, hiszen ezekkel a feltételekkel az A halmaznak legfeljebb $(j-1) + (j-2) < 2k$ elemét zártuk ki.

Jelölje $b_{k+2}, b_{k+3}, \ldots, b_{2k}$ az A halmaz fennmaradó elemeit valamilyen sorrendben, és tekintsük a következő $n+k$ számot:

$$s_i = b_1 + b_2 + \ldots + b_i \qquad (1 \le i \le 2k), \qquad s_j = a_1 + a_2 + \ldots + a_j \qquad (2k < i \le n), \qquad s_{n+1} = b_2, s_{n+2} = b_3, \ldots, s_{n+k}$$

Ha ezek közül valamelyik osztható $(n+k)$-val, akkor készen is vagyunk, ellenkező esetben viszont közülük kettő azonos maradékot ad $(n+k)$-val osztva, ezek különbsége tehát ismét csak osztható $(n+k)$-val. Az nyilván nem lehetséges hogy mindkét szám az utolsó k darab közül kerüljön ki, hiszen ezek páronként különböző maradékkal rendelkeznek. Ha mindkét szám az első n szám között van, akkor különbségük éppen az a_i számok közül néhánynak az összege, ebben az esetben tehát megint csak célhoz értünk. Végül, ha a két szám közül az egyik s_i, ahol $1 \le i \le n$, a másik pedig s_{n+j}, $1 \le j \le k$, akkor a b_i számok megválasztása miatt $i > j$ kell, hogy teljesüljön. Ekkor azonban $s_{n+j} = b_{j+1}$ éppen az s_i egyik összeadandója, következésképpen az $(n+k)$-val osztható $s_i - s_{n+j}$ szám most is felírható az a_i számok közül néhánynak az összegeként.

IV. megoldás. (*Zábrádi Gergely* ötlete.) Most egy indukciós bizonyítást mutatunk. Pontosabban az alábbi erősebb állítást fogjuk teljes indukcióval igazolni.

Állítás. *Legyenek m, n pozitív egész számok. Ha az a_1, a_2, …, a_n egész számok legalább $2i$ különböző maradékot adnak m-mel osztva, akkor vagy van közöttük néhány, amelyek összege osztható m-mel, vagy képezhető belőlük legalább $n+i$ olyan összeg, amelyek páronként különböző maradékot adnak m-mel osztva.*

Ebből az állításból $m=n+k$, $i=k$ választással az eredeti feladat megoldása azonnal leolvasható.

Ha $i=0$, akkor egyszerűen tekintjük az a_1, a_1+a_2, …, $a_1+a_2+\ldots+a_n$ összegeket; ha ezek között van két olyan, amelyik azonos maradékot ad m-mel osztva, akkor különbségük, ami szintén néhány a_i összege, osztható m-mel.

Tegyük fel most egy pillanatra, hogy $i=1$ esetén is igazoltuk már az állítást. Az indukciós lépéshez legyen $j\ge 1$ és tegyük fel azt is, hogy az állítás igazolást nyert már $i=j$ esetén is. Ebből $i=(j+1)$-re a következőképpen kaphatjuk meg az állítást. Legyenek a_1, a_2, …, a_n olyan egész számok, amelyek legalább $2j+2$ különböző maradékot adnak m-mel osztva. Válasszunk ki közülük két különböző maradékot adót, és tekintsük az összes olyan a_i-t, amelyik ezek valamelyikével kongruens modulo m. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy ezek éppen az a_{t+1}, a_{t+2}, …, a_n számok. Az a_1, a_2, …, a_t számokról tudjuk azt, hogy legalább $2j$ különböző maradékot adnak m-mel osztva.

Tegyük fel, hogy az a_i számokból nem képezhető m-mel osztható összeg. Ekkor az indukciós feltevés és az $i=1$ esetre vonatkozó feltevés értelmében az a_1, a_2, …, a_t számokból képezhető $t+j$ különböző maradékot adó összeg, az a_{t+1}, a_{t+2}, …, a_n számokból pedig képezhető $n-t+1$ különböző maradékot adó összeg. Jelölje ezeket rendre s_1, s_2, …, s_{t+j}, illetve r_1, r_2, …, r_{n-t+1}. Minden további nélkül feltehető az is, hogy $s_1=a_1+a_2+\ldots+a_t$. Tekintsük most a következő $n+j+1$ számot: s_1, s_2, …, s_{t+j}, s_1+r_1, s_1+r_2, …, s_1+r_{n-t+1}, ezek bármelyike felírható az a_i számok közül néhánynak az összegeként. Tudjuk, hogy az első $t+j$ szám páronként inkongruens modulo m, és hasonlóképpen az utolsó $n-t+1$ is az. Az sem lehet, hogy valamelyik s_b ugyanolyan maradékot ad m-mel osztva, mint s_1+r_c, hiszen különbségük, $(s_1-s_b)+r_c$ jól láthatóan néhány a_i összege. A felsorolt $n+j+1$ szám tehát páronként inkongruens modulo m, és éppen ezt akartuk megmutatni.

Annyi van már csak hátra, hogy a fent kimondott állítást $i=1$ esetén is igazoljuk. Tegyük fel tehát, hogy az a_1, a_2, …, a_n számok közül a_1 és a_2 különböző maradékot adnak m-mel osztva. Ha az $a_1, a_2, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, \ldots, a_1+a_2+\ldots+a_n$ számok között van kettő, ami ugyanazt a maradékot adja, akkor különbségük, ami nem más, mint néhány a_i összege, osztható lesz m-mel. Ellenkező esetben pedig máris találtunk $n+1$ olyan összeget, ami mind különböző maradékot ad m-mel osztva.

Megjegyzések. 1. Ahogy azt *Gyenes Zoltán* és *Kiss Gergely* is megjegyzik, az első megoldásból (és az azzal lényegében megegyező másodikból is) világosan látszik, hogy nem kell megkövetelnünk $2k$ különböző maradék létezését: elegendő, ha az a_i számokból kiválasztható k olyan pár, hogy az azonos párban lévő számok különböző maradékot adnak $(n+k)$-val osztva.

Ez megtehető már akkor is (hogyan?), ha csak $k+1$ különböző maradék létezését követeljük meg (feltéve persze, hogy $2k\le n$).

2. A KöMaL 2000. decemberi számának A. 252. feladata szerint a $2k\le n$ feltételre valójában nincs is szükség: a feladatban megfogalmazott állítás igazolásához elég annyit feltenni, ahogy az a_1, a_2, …, a_n számok legalább $k+1$ különböző maradékot adnak $(n+k)$-val osztva. Az alábbiakban erre mutatunk két különböző bizonyítást.

3. Megjegyezzük még, hogy *Szemerédi Endre* egy nehéz eredményére támaszkodva ez a feltétel is lényegesen gyengíthető: ha k értéke n-hez képest „elég nagy”, akkor elegendő annyit feltenni, hogy az a_i számok több, mint $c\sqrt{k}$ különböző maradékot adnak $(n+k)$-val osztva.

V. megoldás. (*Csikvári Péter* megoldásából.) Ha $k=0$, akkor a feltétel semmitmondó, és a bizonyítandó állítás következik a II. megoldás elején kimondott egyszerű állításból. A továbbiakban legyen tehát $k>0$.

Tegyük fel, hogy az a_1, a_2, …, a_{k+1} számok különböző maradékot adnak $(n+k)$-val osztva. Legyen $s=a_1+a_2+\ldots+a_{k+1}$, és tekintsük $1\le i\le k+1$ esetén az a_i és $b_i=s-a_i$ számokat, valamint $1\le j\le n-k$ esetén a $c_j=a_1+a_2+\ldots+a_{k+j}$ számokat, ez összesen $n+k+2$ egész szám. Vizsgáljuk meg, hogyan adhat ezek közül kettő ugyanolyan maradékot $(n+k)$-val osztva. Az a_i számok páronként különböző maradékot adnak, csakúgy mint a b_i számok. Ha a c_j számok közül kettő ugyanazt a maradékot adja, akkor már készen is vagyunk. Hasonlóképpen készen vagyunk akkor is, ha valamelyik c_j szám ugyanolyan maradékot ad, mint valamelyik a_i vagy b_i, hiszen mind maga az a_i szám, mind pedig a b_i minden egyes összeadandója szerepel bármelyik c_j összeadandói között. Mivel a_i a b_j-nek is összeadandója $j\ne i$ esetén, feltehetjük azt is, hogy ilyen esetekben a_i és b_j különböző maradékot adnak.

Összefoglalva, feltehetjük tehát, hogy ha a fent felsorolt $n+k+2$ szám között kettő azonos maradékot ad $(n+k)$-val osztva, akkor ez a két szám a_i és b_i egy alkalmas $1\le i\le k+1$ indexre. Minden egyéb esetben ugyanis a bizonyítandó állítás az elmondottak miatt rögtön következik. Vegyük észre azt is, hogy azonnal befejezettnek tekinthetjük a bizonyítást akkor is, ha a felsorolt $n+k+2$ szám valamelyike osztható $(n+k)$-val. Egyetlen olyan eset képzelhető már csak el, amelyben még nem végeztük el a bizonyítást, nevezetesen ha 3 különböző i index is létezik úgy, hogy a_i és b_i ugyanazt a maradékot adják, vagyis különbségük, $s-2a_i$ osztható $(n+k)$-val. Legyenek ezek i_1, i_2 és i_3, ekkor a $2a_{i_1}$, $2a_{i_2}$ és $2a_{i_3}$ számok ugyanolyan maradékot adnak $(n+k)$-val osztva. Nem nehéz megmutatni, hogy ez csak úgy lehetséges, ha az a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3} számok közül kettőnek a maradéka megegyezik, ellentétben a megoldás legelején tett feltevésünkkel. Ez mutatja, hogy a bizonyítást már minden esetben elvégeztük.

VI. megoldás. (*Nagy Zoltán* megoldásából.) Ha a számok közül valamelyik osztható $(n+k)$-val, akkor már készen is vagyunk, találtunk egy egytagú megfelelő összeget. Tegyük fel tehát, hogy az a_i számok p különböző maradékot ($p \geq k+1$) adnak $(n+k)$-val osztva, és ezek $0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_p < n+k$. Ha egy összeg minden egyes tagját egy azzal azonos maradékot adó számmal helyettesítünk, a kapott összeg nyilván pontosan akkor lesz osztható $(n+k)$-val, ha az eredeti összeg is ilyen volt. Ezért feltehetjük azt is, hogy mindegyik a_i valamelyik m_j-vel egyenlő.

Állítsuk nagyság szerinti sorrendbe az a_i számokat, vagyis legyen $a_1 = a_2 = \ldots = a_{k_1} = m_1$, $a_{k_1+1} = a_{k_1+2} = \ldots = a_{k_2} = m_2$, ..., $a_{k_{p-1}+1} = \ldots = a_n = m_p$, ahol $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_{p-1} < n$. Tekintsük most minden $1 \leq i \leq n$ esetén az $s_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_i$ összeget, és minden $1 \leq j \leq p-1$ esetén a $t_j = a_1 + a_2 + \ldots + a_{k_j-1} + a_{k_j+1}$ összeget is. Ez összesen $n+p-1 \geq n+k$ szám. Ha ezek között van $(n+k)$-val osztható, akkor készen vagyunk. Ellenkező esetben kell, hogy legyen kettő, amelyik ugyanolyan maradékot ad $(n+k)$-val osztva.

Ha az s_i számok között van két ilyen, akkor a szokásos indoklás működik.

Ha $s_i - t_j$ osztható $(n+k)$-val valamilyen i, j esetén, akkor ismét csak készen vagyunk. Ha ugyanis $i < k_j$, akkor az s_i összeg valódi része a t_j összegnek, és ezért $t_j - s_i$ néhány a_i összege. Ha $i > k_j$, akkor pedig a t_j összeg képezi valódi részét az s_i összegnek. Az pedig nem lehet, hogy $i = k_j$, mert ekkor $s_i - t_j = a_{k_j} - a_{k_j+1} = m_j - m_{j+1}$ lenne, ami nem osztható $(n+k)$-val.

Végül tegyük fel, hogy $t_\ell - t_j$ osztható $(n+k)$-val valamilyen $1 \leq j < \ell \leq p-1$ esetén. Ha még $j+1 < \ell$ is teljesül, akkor könnyen látható, hogy $t_\ell - t_j$ az a_i számok közül néhánynak az összege. Ugyanez a helyzet akkor is, ha $\ell = j+1$ és $k_{j+1} \geq k_j+2$. Az pedig nem lehetséges, hogy $\ell = j+1$ és $k_{j+1} = k_j+1$, ekkor ugyanis $t_\ell - t_j = a_{k_{j+1}+1} + a_{k_j} - a_{k_{j+1}} = m_{j+2} + m_j - m_{j+1}$. Viszont az m_i számokra tett feltevés miatt nyilván $0 < m_j < m_{j+2} + m_j - m_{j+1} < m_{j+2} < n+k$, vagyis az egyetlen megmaradt esetben $t_\ell - t_j$ nem osztható $(n+k)$-val.