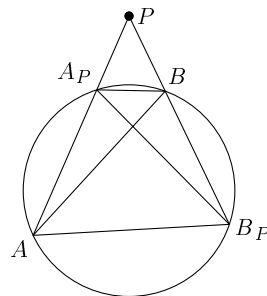
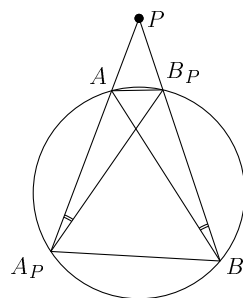
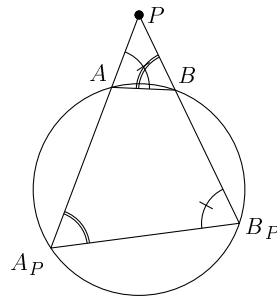
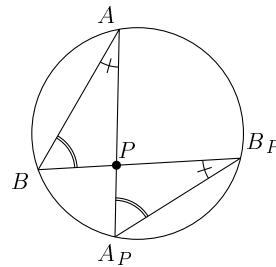
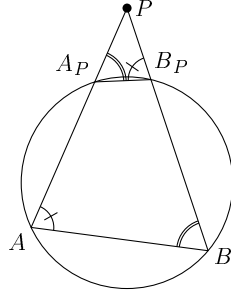


Az első két megoldás a körre vonatkozó inverzió fogalmára támaszkodik, ezért röviden összefoglaljuk ennek a transzformációnak legfontosabb tulajdonságait. Ha adott a síkon egy O középpontú, r sugarú k kör, akkor a k körre vonatkozó inverzió a sík O -tól különböző pontjainak az a leképezése, amely tetszőleges P ponthoz az OP félegyenes azon P' pontját rendeli hozzá, amelyre $OP \cdot OP' = r^2$. Ha az A pont (vagy alakzat) képe B , akkor a B ponté (alakzaté) éppen A . A leképezés tehát egy-egyértelmű, a k pontjait helyben hagyja, k -n belüli pontokat pedig k -n kívüli pontokba visz, és fordítva. Ha egy kör az O pontot elkerüli, akkor a körvonal képe egy, az O -t szintén elkerülő körvonal, egy O -n áthaladó k_1 körvonal képe pedig egy O -ra nem illeszkedő egyenes: a k és k_1 körök hatványvonala. Fontos tulajdonsága az inverzióknak a szögtartás: ha k_1 és k_2 egy-egy körvonal (elfajuló esetben O -ra nem illeszkedő egyenes), akkor a k'_1 és k'_2 körök ugyanolyan szög alatt metszik egymást, mint a k_1 és k_2 körök. (Két egymást metsző kör által bezárt szög alatt közös pontjukban húzott érintők hajlásszögét értjük.) Speciálisan, ha a k_1 kör k -t merőlegesen metszi, akkor $k' = k$ miatt k'_1 is merőlegesen metszi k -t, méghozzá ugyanabban a két pontban, ezért $k'_1 = k_1$.

Ezek után lássuk először a legkevesebb diszkussziót igénylő megoldást.

I. Megoldás. Ha P az ABC háromszög köré írható k körön van, akkor $A_P = B_P = C_P = P$, és így az $A_P B_P C_P$ háromszögről nem beszélhetünk. Az egyazon húrhoz tartozó kerületi szögek egyenlőségéről szóló tételre hivatkozva az 1. ábráról leolvasható, hogy az $A_P B_P P$ háromszög hasonló a BAP háromszöghöz, függetlenül attól, hogy P a k körön belül, vagy azon kívül helyezkedik-e el. Ezért $\frac{A_P B_P}{B_P P} = \frac{BA}{AP}$, és hasonló módon $\frac{C_P B_P}{B_P P} = \frac{BC}{CP}$.

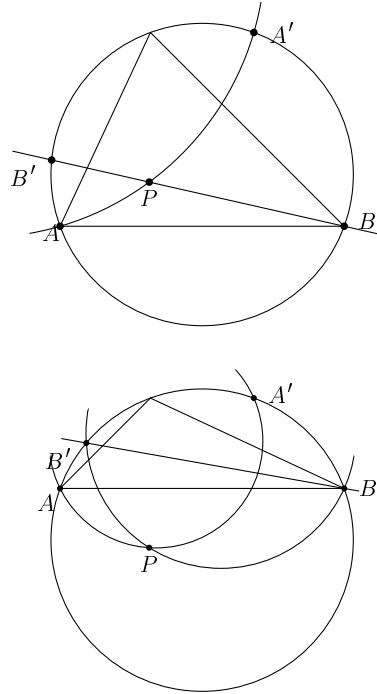




1. ábra

Az $APB_P = B_PCP$ feltétel tehát ekvivalens az $\frac{AP}{CP} = \frac{AB}{CB}$ feltétellel, vagyis azzal, hogy P az A és C pontokhoz, valamint az $\frac{AB}{CB}$ arányhoz tartozó Apollóniusz-körnek k -ra nem illeszkedő pontja. (Abban a speciális esetben, amikor $AB = CB$, ez az Apollóniusz-kör elfajul, és az AC szakasz felező merőlegesével egyezik meg.) Ugyanígy kapjuk azt is, hogy az $APB_P = A_PC_P$ feltétel ekvivalens azzal, hogy P a B és C pontokhoz, valamint az $\frac{BA}{CA}$ arányhoz tartozó Apollóniusz-körnek k -ra nem illeszkedő pontja. Az APB_PCP háromszög tehát pontosan akkor szabályos, ha P az említett két Apollóniusz-kör (k -ra nem illeszkedő) közös pontja.

Az AC egyenes elválasztja az első Apollóniusz-kör k -val való, B -től különböző B' metszéspontját a B ponttól. Ugyanígy, a BC egyenes elválasztja a második Apollóniusz-kör k -val való, A -tól különböző A' metszéspontját az A ponttól. Következésképpen az A, B, A', B' pontok a k körön ilyen sorrendben helyezkednek el (2. ábra), és ezért a két Apollóniusz-kör mind a k körön belül, mind azon kívül egy-egy pontban metszi egymást. Pontosabban, a k -n kívüli metszéspont nem létezik abban az esetben, ha mind a két Apollóniusz-kör elfajul, ez azonban pontosan akkor következik be, ha az ABC háromszög szabályos. Ezzel a feladat első állítását beláttuk.



2. ábra

A második állítás bizonyítása azon az észrevételen alapul, hogy az említett Apollóniusz-körök a k kört merőlegesen metszik. Ekkor ugyanis a szögtartás miatt a k -ra vonatkozó inverzió mind a két Apollóniusz-kört saját magába viszi, és ezért a körök metszéspontjainak képe az inverzió során ugyanez a két pont. Mivel a k körön belüli pontok a k -n kívüli pontokba transzformálódnak, ez csak úgy lehetséges, ha az inverzió P -t és Q -t felcseréli. A P és Q pontok tehát egymásnak a k körre vonatkozó inverz képei, ennek megfelelően a PQ egyenes valóban áthalad a k kör O középpontján.

Szimmetria okokból elegendő azt megmutatni, hogy az első Apollóniusz-kör (jelöljük ezt k_1 -gyel) merőlegesen metszi k -t. Ez nyilvánvaló, ha $AB = CB$, egyébként pedig feltehetjük, hogy $\alpha = BAC < BCA = \gamma$. Legyen a B -ből induló belső szögfelező talppontja T , a külső S . A szögfelező-tétel értelmében ST éppen a k_1 körnek az AC egyenesre eső átmérője, amely tartalmazza az A pontot is (3. ábra).

foglalkoznunk, hogy ez a két félegyenes egymáshoz képest milyen helyzetű. Mind a négy esetben könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\begin{aligned} APB \sphericalangle &= 180^\circ - BAP \sphericalangle - PBA \sphericalangle = 180^\circ - \phi(BA_P) - \phi(B_P A) = \\ &= (180^\circ - \phi(BA_P) - \phi(A_P A)) - \phi(B_P A_P) = \phi(AB) - \phi(B_P A_P) = \gamma - \phi(B_P A_P). \end{aligned}$$

Ugyanígy $BPC \sphericalangle = \alpha - \phi(C_P B_P)$ és $CPA \sphericalangle = \beta - \phi(A_P C_P)$. Mivel most az APB_PCP háromszög körüljárása ellentétes az ABC háromszögével, ez a háromszög pontosan akkor szabályos, ha a $\phi(B_P A_P)$, $\phi(C_P B_P)$, $\phi(A_P C_P)$ szögek közül legalább kettő (és persze akkor a harmadik is) 60° . Ezzel ekvivalens az, hogy a P pontból az AB , BC , CA szakaszok rendre $\gamma - 60^\circ$, $\alpha - 60^\circ$ és $\beta - 60^\circ$ alatt látszanak. Jelölje az ennek megfelelő látóöríveket rendre ℓ'_C , ℓ'_A és ℓ'_B .

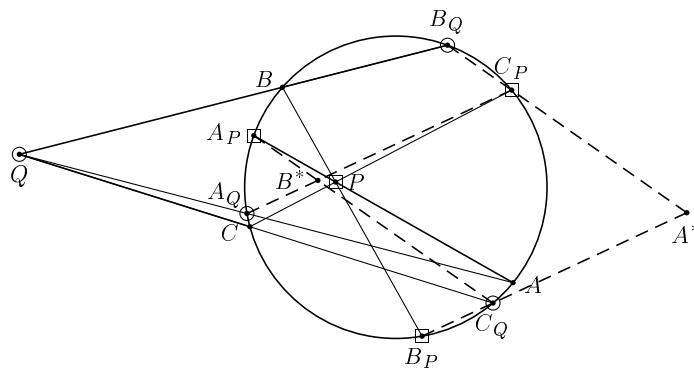
Állítás. A k körre vonatkozó inverziónál az ℓ_A , ℓ_B , ℓ_C ívek képe rendre ℓ'_A , ℓ'_B és ℓ'_C .

Ebből azonnal következik, hogy a k körön kívül is pontosan egy olyan Q pont van, amelyre az AQB_QC_Q háromszög szabályos, mégpedig ez a pont a P pont inverz képe. Probléma csak akkor lenne, ha P egybeesne a k kör középpontjával, ez azonban nem lehetséges, hiszen az ABC háromszög nem szabályos. Egyúttal azt is megkaptuk, hogy a k kör középpontja, valamint a P és Q pontok egy egyenesen vannak.

Most már csak a fenti állítást kell igazolni. Ha a háromszög szögeire semmiféle megkötést nem teszünk, akkor szimmetria okok miatt nyilván elég annyit megmutatni, hogy ℓ_A inverz képe éppen ℓ'_A . A bizonyítás azon az egyszerű észrevételen múlik, hogy az a két ív, amelynek pontjaiból az XY (irányított) szakasz ϕ_1 , illetve ϕ_2 szög alatt látszik, $\phi_1 - \phi_2$ szöget zár be egymással. Ennek alapján a kerületi szögek tételéből következik, hogy mind az ℓ_A ív, mind az ℓ'_A ív 60° -os szöget zár be a k körrel. Nem nehéz megmutatni, hogy az ℓ_A ív a k körön belül, az ℓ'_A ív pedig azon kívül halad. A két ívnek ugyanazok a végpontjai, de nem egészítik ki egymást egyetlen körvonallá. Mivel az a két körvonal, amely a k -t a B és C pontokban egyaránt 60° -os szög alatt metszi, egymás inverz képe a k körre nézve, a szóban forgó két ív is egymás inverze, és ezt akartuk bizonyítani.

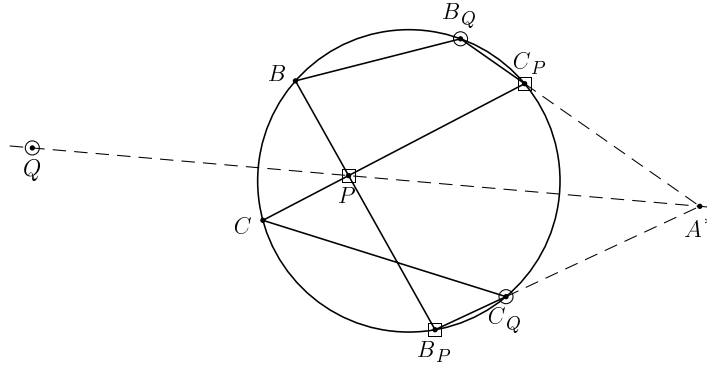
III. Megoldás. (Béky Bence megoldása.) Az előző megoldások valamelyikét követve először is megállapítjuk, hogy valóban két ilyen pont létezik, méghozzá egy a háromszög köré írható körön belül (jelöljük ezt P -vel), a másik pedig a körön kívül (legyen ez Q). Vegyük most észre, hogy az APB_PCP háromszög körüljárása megegyezik az ABC háromszögével, míg az AQB_QC_Q háromszögé azzal ellentétes. Található tehát egy, a k kör O középpontjára illeszkedő e egyenes, amelyre az APB_PCP háromszöget tükrözve az AQB_QC_Q háromszöget kapjuk.

Vizsgáljuk először azt az általános esetet, amikor A_P különbözik a B_Q , C_Q pontoktól, B_P különbözik az A_Q , C_Q pontoktól és C_P is különbözik az A_Q , B_Q pontoktól. Nem lehet, hogy például az APB_Q egyenes egybeesik az AQB_P egyenessel, mert ekkor $A_P = B_P$ lenne. Az APB_Q egyenes tehát csak akkor lehet párhuzamos az AQB_P egyenessel, ha egyben e -vel is párhuzamos. Ugyanez elmondható a másik két értelemszerűen felírt egyenespárról. Jelölje A^* , B^* és C^* rendre a B_PC_Q és B_QC_P egyeneseknek, az APC_Q és AQC_P egyeneseknek, illetve az APB_Q és AQB_P egyeneseknek a metszéspontját. Az elmondottak szerint ezen egyenespárok közül legfeljebb egy lehet párhuzamos helyzetben, az e egyenesre eső A^* , B^* , C^* pontok közül tehát kettő biztosan létrejön. Feltéhetjük, hogy az A^* és B^* pontok ilyenek. Világos, hogy A^* és B^* különböző pontok (4. ábra).



4. ábra

Tekintsük most a k körbe írt $BB_QC_PCC_QB_P$ önmagát átmetsző hatszöget. Ennek BB_Q és CC_Q szemközti oldalai Q -ban, B_QC_P és C_QB_P szemközti oldalai A^* -ban, C_PC és B_PB szemközti oldalai pedig P -ben metszik egymást. Pascal tétele szerint tehát az A^* pont illeszkedik a PQ egyenesre (5. ábra).



5. ábra

Hasonlóképpen belátható, ezúttal az $AA_QC_PC_CQAP$ hatszögből kiindulva, hogy a B^* pont is illeszkedik a PQ egyenesre. A PQ egyenes tehát egybeesik az A^*B^* egyenessel, vagyis az O ponton áthaladó e egyenessel, ami bizonyítja az általános esetben a feladat második állítását.

Tegyük fel végül, hogy mondjuk $B_P = C_Q = X$, ekkor az e -re való szimmetria miatt $B_Q = C_P = Y$, végül pedig $A_P = A_Q$ a k körnek az a Z pontja, amelyre az XYZ háromszög szabályos. Világos, hogy Z illeszkedik az e egyenesre, XY pedig merőleges arra. Ekkor az B_PC_Q és B_QC_P egyenesek helyett tekintsük a k körhöz annak X , illetve Y pontjában húzott érintőjét, ez a két egyenes a Z pontnak az XY -ra vonatkozó tükörképében metszi egymást. Jelöljük most ezt a pontot A^* -gal. A B^* , C^* pontok ugyanúgy definiálhatók, mint az általános esetben, és ezúttal egybeesnek Z -vel. Az A^* és B^* pontok tehát most is az e egyenest határozzák meg. Most már szinte szó szerint megismételhetjük az előző bekezdést azzal az apró módosítással, hogy most a $BB_QC_PC_CQB_P$ hatszög elfajuló abban az értelemben, hogy két-két szomszédos csúcsa egybeesik. Ezért a Pascal tétel alkalmazásánál a B_PC_Q és B_QC_P egyenesek helyett éppen az előbb említett érintőket kell tekinteni.

Megjegyzések. 1. A feladat komplex számok segítségével viszonylag egyszerű számolás útján is megoldható. Ezt az utat választotta Gyenes Zoltán a második állítás bizonyításához.

2. Egy mélyebb matematikai eszközöket használó megoldást tartalmaz, és a feladat háttérére mutat rá *Graskó András* cikke, amely a következő számunkban jelenik meg.

3. A harmadik megoldásból azonnal leolvasható, hogy az $A_PB_PC_P$ és $A QB_QC_Q$ háromszögek a PQ egyenesre szimmetrikusan helyezkednek el. Erre az eredményre az első megoldás ügyes folytatásával is eljuthatunk. *Hogyan?* Ennek az önmagában is szép feladatnak a megoldását már az olvasóra bizzuk.