

Megmutatjuk, hogy $f_3(x) = x$.

$$\begin{aligned} f_2(x) &= f_1(f_1(x)) = -\frac{2f_1(x) + 7}{f_1(x) + 3} = -\frac{-2\frac{2x+7}{x+3} + 7}{-\frac{2x+7}{x+3} + 3} = \\ &= -\frac{-4x - 14 + 7x + 21}{-2x - 7 + 3x + 9} = -\frac{3x + 7}{x + 2}. \end{aligned}$$

Hasonló számolással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f_3(x) &= f_1(f_2(x)) = -\frac{2f_2(x) + 7}{f_2(x) + 3} = -\frac{-2\frac{3x+7}{x+2} + 7}{-\frac{3x+7}{x+2} + 3} = \\ &= -\frac{-6x - 14 + 7x + 14}{-3x - 7 + 3x + 6} = -\frac{x}{-1} = x. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy $f_6(x) = f_3(f_3(x)) = f_3(x) = x$, és indukcióval kapjuk, hogy ha $3 \mid n$, akkor $f_n(x) = x$. Így $3 \mid 2001$ miatt $f_{2001}(x) = x$, tehát $f_{2001}(2002) = 2002$.

Somogyi Dávid (Fazekas Mihály Fővárosi Gyak. Gimn. 12. évf.)

Megjegyzések. 1. A megoldásból az is kiderül, hogy

$$f_n(x) = \begin{cases} x \\ -\frac{2x+7}{x+3} = f_1(x) \\ -\frac{3x+7}{x+2} = f_2(x) \end{cases}$$

attól függően, hogy n a 3-mal osztva 0, 1 vagy 2 maradékot ad.

2. A megoldás során igen felületesen kezeltük a függvények *értelmezési tartományát*. $f_1(x)$ pontosan akkor nem értelmes, ha $x = -3$. Összetett függvényként $f_1(f_1(x))$ akkor értelmes, ha a belső függvény az, tehát $x \neq -3$, valamint $f_1(x)$ értéke behelyettesíthető, tehát $f_1(x) \neq -3$, azaz $x \neq -2$. Épp ezt az értéket zárja ki f_2 tört-alakjának nevezője.

$f_3(x) = f_1(f_2(x))$ pedig akkor értelmes, ha $f_2(x)$ értelmes, azaz $x \neq -3$ és $x \neq -2$, továbbá $f_2(x)$ behelyettesíthető $f_1(x)$ -be, $-\frac{3x+7}{x+2} \neq -3$. Szerencsére ez nem jelent újabb megszorítást, $f_2(x)$ éppen a -3 értéket nem veszi föl. A pontos állítás tehát: ha $x \neq -2$ és $x \neq -3$, akkor $f_3(x) = x$, ezen a két helyen pedig $f_3(x)$ nem értelmes. Ez pedig azt jelenti, hogy ha $n > 3$, akkor $f_n(x)$ értelmezési tartománya nem szűkül tovább, tehát például jogosan helyettesítjük be a 2002-t f_{2001} -be.

3. A megoldás kulcsa az volt, hogy három helyettesítés után megkaptuk az $x \mapsto x$ függvényt (az értelmezési tartományon). Ez nyilván a megadott együtthatókon múlik, és ránézésre egyáltalán nem világos, hogy hogyan. Fölvetődhet a kérdés, hogy ehhez az észrevételhez csupán a türelmes próbálgatás „jutalmaként” juthatunk-e el.

Az $f_1(x)$ grafikonja

Az értelmezési tartomány fenti vizsgálatát újragondolva megsejthetjük, sőt, szemléletesen igazolhatjuk is a talált tulajdonságot, mégpedig a megoldásban elkerülhetetlen számolgatás nélkül.

Láttuk, hogy a nyilvánvalóan kizárandó -3 mellett a -2 -t kell kizárnunk, ami $f_1^{-1}(-3)$. Az alapvető észrevétel az, hogy újabb értékeket már nem kell kizárnunk, hiszen f_1 a -2 értéket egyáltalán nem veszi fel. A grafikonon látható, hogy ez azon múlik, hogy a görbe vízszintes aszimptotája $y = -2$.

Az aszimptotikus viselkedést szemléletesen úgy is szokás fogalmazni, hogy ha $x = -3$, akkor a függvényérték „végtelen

nagy", illetve hogy ha az x „végtelen nagy", akkor a függvényérték -2 .

Ha ezt például ténylegesen le akarnánk írni, akkor valahogy így tehetnénk:

$$f_1(-3) = \infty, \quad f_1(\infty) = -2.$$

Ha most beírjuk még, hogy $f_1(-2) = -3$, akkor nehéz nem figyelni a

$$-2 \xrightarrow{f_1} -3 \xrightarrow{f_1} \infty \xrightarrow{f_1} -2$$

„láncra": ha „be vesszük" a ∞ értéket a valós számok közé és az f_1 függvényt épp így terjesztjük ki, akkor ez a hármas ciklus azt jelenti, hogy $f_3(-2) = -2$, $f_3(-3) = -3$ és $f_3(\infty) = \infty$.

Innen tehát meg lehet sejteni, hogy $f_3(x)$ „barátságos" függvény lesz, és így a számolásnak is nagyobb önbizalommal vághatunk neki. De ez a kísérlet lényegében bizonyosságot is szolgáltat, ha meggondoljuk, hogy f_3 maga is racionális elsőfokú törtfüggvény, amit három helyettesítési értéke egyértelműen meghatároz. Ha tehát $f_3(x)$ három helyen ugyanazt az értéket veszi föl, mint az $x \mapsto x$ függvény, akkor – a teljes értelmezési tartományán – azonos vele. Ehhez persze az $x \mapsto x$ függvény értelmezési tartományát és értékészletét is ki kell bővítenünk a ∞ értékkel.

4. A fentiekből az is kiderül, hogy hogyan készíthetők az f_1 -hez hasonló tulajdonságú függvények. A kiterjesztett értelmezési tartományon ugyanis az

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad \text{függvény új értékei} \quad f(\infty) = \frac{a}{c} \quad \text{és} \quad f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty.$$

Így ha tetszőleges $u \neq v$ számokra az $f: \infty \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow \infty$ hármas ciklust szeretnénk elérni, akkor az

$$f(x) = \frac{u(x - v) - (u - v)^2}{x - v}$$

függvény adódik. Éppen így készült a feladat f_1 függvénye az $u = -2$ és $v = -3$ értékekkel.