

I. megoldás. Legyen a nagy szabályos háromszög három csúcsa A , B és C . Az első beírt négyzet két csúcsa ABC -nek ugyanarra az oldalára esik. Legyen ez a két csúcs D és E , a négyzet másik két csúcsa pedig F és G (lásd az ábrát). Jelöljük a négyzet oldalának hosszát x -szel. Mivel ADG és BFE olyan derékszögű háromszögek, amelyeknek A -nál, illetve B -nél lévő szöge 60° -os, azért $AD = BE = \frac{x \cdot \sqrt{3}}{3}$, és így

$$AB = AD + DE + EB = x \left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \right).$$

Az $ABFG$ trapéz területe tehát

$$T_{ABFG} = \frac{1}{2} \cdot \left[x + x \left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) \right] \cdot x = x^2 \cdot \frac{3 + \sqrt{3}}{3}.$$

Ez az $EFGD$ négyzet területének, x^2 -nek $\frac{3 + \sqrt{3}}{3}$ -szorosa. Ugyanilyen összefüggést kapunk a GFC háromszögbe írható négyzet és az ottani trapéz területe között, majd tovább az újabb és újabb négyzetek és trapézok területe között. A trapézok végtelen sorozata a teljes ABC háromszöget lefedi, minden trapéz területének $\frac{3}{3 + \sqrt{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \approx 0,634$ -ed részét fedi le a megfelelő négyzet, tehát a négyzetek végtelen sorozata az ABC háromszög területének $\frac{3 - \sqrt{3}}{2}$ részét fedi le.

II. megoldás. Az I. megoldás jelöléseit használjuk. Az ABC háromszög területe

$$T_{ABC} = AB^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot x^2.$$

A CGF háromszög hasonló a CAB háromszöghöz, hasonlóságuk aránya megegyezik a két háromszögbe írható négyzetek oldalainak arányával. Vagyis a második háromszögbe írható négyzet oldala

$$x \cdot \frac{GF}{AB} = x \cdot \frac{1}{1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}} = x \cdot (2\sqrt{3} - 3).$$

Ugyanilyen hasonlóságok alapján az i -edik háromszögbe ($i = 1, 2, 3, 4, \dots$) írható négyzet oldala $x \cdot (2\sqrt{3} - 3)^{i-1}$. Ezért a négyzetek végtelen sorozata által lefedett terület

$$T = x^2 \cdot \left(1 + (2\sqrt{3} - 3)^2 + (2\sqrt{3} - 3)^4 + \dots \right).$$

Ennek a végtelen mértani sornak az összege az ismert képlet szerint:

$$T = x^2 \cdot \frac{1}{1 - (2\sqrt{3} - 3)^2} = x^2 \cdot \frac{3\sqrt{3} + 5}{8}.$$

A lefedett terület és az ABC háromszög területének hányadosa tehát

$$\frac{T}{T_{ABC}} = \frac{x^2 \cdot \frac{3\sqrt{3} + 5}{8}}{x^2 \cdot \left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \approx 0,634.$$

Hablicsek Márton (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.) megoldásai alapján

