

Jelöljük a háromszög oldalait a szokásos módon a , b , c -vel, területét T -vel, kerületének felét pedig s -sel.

Először kifejezzük az egyenlőtlenség középső tagjában szereplő arányokat a háromszög oldalaival. Az ABA_1 háromszögben BO szögfelező, ezért a szögfelezőtétel szerint a szemközti oldalt a mellette levő oldalak arányában osztja, vagyis

$$(1) \quad \frac{AO}{A_1O} = \frac{AB}{A_1B}.$$

Az AA_1 egyenes a CAB háromszögben szögfelező, ezért

$$(2) \quad \frac{A_1B}{A_1C} = \frac{c}{b}.$$

De $A_1B + A_1C = a$, vagyis $A_1C = a - A_1B$, amit (2)-be helyettesítve, majd a kapott egyenlőségéből A_1B -t kifejezve

$$A_1B = \frac{a \cdot c}{b + c}.$$

Ezt (1)-be beírva kapjuk, hogy

$$\frac{AO}{A_1O} = \frac{AB}{A_1B} = \frac{c}{\frac{a \cdot c}{b + c}} = \frac{b + c}{a}.$$

Ugyanígy látható be, hogy

$$\frac{BO}{B_1O} = \frac{a + c}{b} \quad \text{és} \quad \frac{CO}{C_1O} = \frac{a + b}{c}.$$

Ismert, hogy $R = \frac{abc}{4T}$, $r = \frac{T}{s}$ és $T^2 = s(s - a)(s - b)(s - c)$. Ezeket az összefüggéseket felhasználva a $4R/r$ hányadost is kifejezhetjük az oldalakkal:

$$\frac{4R}{r} = \frac{\frac{abc}{T}}{\frac{T}{s}} = \frac{abc \cdot \frac{a+b+c}{2}}{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}} = \frac{8abc}{(b + c - a)(a - b + c)(a + b - c)}.$$

A bizonyítandó egyenlőtlenségek tehát az oldalakkal kifejezve:

$$(3) \quad 8 \leq \frac{(a + b)(a + c)(b + c)}{abc} \leq \frac{8abc}{(b + c - a)(a - b + c)(a + b - c)}.$$

A számtani és a mértani közepek közötti egyenlőtlenség szerint $2\sqrt{ab} \leq a + b$, $2\sqrt{bc} \leq b + c$ és $2\sqrt{ac} \leq a + c$. Ezeket összeszorozva éppen a bizonyítandó bal oldali egyenlőtlenséggel ekvivalens

$$8abc \leq (a + b)(b + c)(a + c)$$

egyenlőtlenséget kapjuk.

A jobb oldali egyenlőtlenséget is három egyenlőtlenség összeszorozásával kaphatjuk. Ezek:

$$\frac{a + b}{c} \leq \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{(b + c - a)(a - b + c)}}, \quad \frac{b + c}{a} \leq \frac{2\sqrt{bc}}{\sqrt{(a - b + c)(a + b - c)}} \quad \text{és} \quad (4) \quad \frac{c + a}{b} \leq \frac{2\sqrt{ac}}{\sqrt{(b + c - a)(a + b - c)}}.$$

Az oldalak szerepe a három egyenlőtlenségben szimmetrikus, ezért közülük elég csak egyet bebizonyítanunk. Az első négyzetre emelve és átszorozva:

$$(a + b)^2(b + c - a)(a - b + c) \leq 4abc^2, \quad \text{azaz} (a + b)^2(c^2 - (a - b)^2) \leq 4abc^2.$$

Ezt rendezve:

$$c^2((a + b)^2 - 4ab) \leq (a + b)^2(a - b)^2, \quad \text{vagyis} c^2(a - b)^2 \leq (a + b)^2(a - b)^2$$

adódik, ami nyilván igaz, mert a háromszög-egyenlőtlenség miatt $c^2 < (a + b)^2$; $(a - b)^2$ pedig nemnegatív. Tehát teljesülnek a (4) egyenlőtlenségek, s így az összeszorozásukkal kapható, (3) jobb oldalán lévő egyenlőtlenség is.

Könnnyen látható, hogy mindkét bizonyított egyenlőtlenségben pontosan akkor van egyenlőség, ha $a = b = c$, azaz ha az ABC háromszög szabályos.

