

I. megoldás. Az $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ függvény grafikonja az 1. ábrán látható, szaggatott vonallal rajzoltuk meg a keresett egyenest.

Vegyük észre, hogy ha a szóban forgó polinomokon elvégezzük az $x \leftarrow x + \frac{1}{3}$ helyettesítést – grafikusán ez azt jelenti, hogy a görbét eltoljuk az x tengely mentén $-\frac{1}{3}$ egységgel –, akkor a kapott $f_1(x) = f\left(x + \frac{1}{3}\right)$ negyedfokú polinom nem tartalmaz harmadfokú tagot:¹Ezt az – úgynevezett Tschirnhaus-féle – helyettesítést alkalmazzák az általános negyedfokú egyenlet megoldásának első lépéseként is a harmadfokú tag kiküszöbölésére.

$$f_1(x) = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^4 - 4\left(x + \frac{1}{3}\right)^3 = 3x^4 - 2x^2 - \frac{8}{9}x - \frac{1}{9}.$$

$f_1(x)$ -ben a páros fokú tagokat teljes négyzetté alakítva kapjuk, hogy

$$f_1(x) = 3\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{8}{9}x - \frac{4}{9}.$$

Az $y = 3\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2$ grafikonját (2. ábra) nyilván az x tengely érinti kétszer, így az $f_1(x)$ grafikonjának kettős érintője $y = -\frac{8}{9}x - \frac{4}{9}$. A keresett egyenest most már az inverz $x \leftarrow x - \frac{1}{3}$ helyettesítéssel kapjuk; egyenlete:

$$y = -\frac{8}{9}\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{4}{9} = -\frac{8}{9}x - \frac{4}{27}.$$

II. megoldás. Az $y = ax + b$ egyenletű egyenes pontosan akkor érinti két pontban az $y = 3x^4 - 4x^3$ függvény grafikonját, ha a $p(x) = 3x^4 - 4x^3 - ax - b$ polinom grafikonja két helyen érinti az x tengelyt, azaz két többszörös gyöke van. A görbe negyedfokú, ezért mindkét többszörös gyök kétszeres, több gyöke nincsen, így ha a gyökök x_1 és x_2 , akkor a $p(x)$ gyöktényezős alakja

$$(*) \quad p(x) = 3(x - x_1)^2(x - x_2)^2.$$

A jobb oldalon a műveleteket elvégezve:

$$\begin{aligned} 3x^4 - 4x^3 - ax - b &= \\ &= 3x^4 - 6(x_1 + x_2)x^3 + 3(x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2)x^2 - 6x_1x_2(x_1 + x_2)x + 3x_1^2x_2^2. \end{aligned}$$

Az együtthatók egyenlőségéből

$$x_1 + x_2 = \frac{2}{3}, (1)x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 = 0, (2)6x_1x_2(x_1 + x_2) = a, (3) - 3x_1^2x_2^2 = b. (4)$$

(2)-ből $(x_1 + x_2)^2 = -2x_1x_2$, azaz (1) felhasználásával $x_1x_2 = -\frac{2}{9}$. Innen (3)-ból $a = -\frac{8}{9}$, (4)-ből pedig $b = -\frac{4}{27}$.

A keresett egyenes egyenlete tehát csak $y = -\frac{8}{9}x - \frac{4}{27}$ lehet, ez az egyenes pedig valóban megoldás, ugyanis az (1), (2) egyenletekből álló rendszer megoldásai valós számok ($x_1 = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$ és $x_2 = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}$), és így a fenti lépések megfordíthatók, a (*) szorzat tényezői valós együtthatós polinomok.

Rácz Béla András (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.)

III. megoldás. Ha a tetszőleges valós szám, akkor a görbét az $(a; f(a))$ pontjában érintő egyenes egyenlete

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Ha $b \neq a$, akkor a $(b; f(b))$ -beli érintő pontosan akkor lesz ugyanez az egyenes, ha

$$f'(a) = f'(b)(1)f(a) - a \cdot f'(a) = f(b) - b \cdot f'(b). (2)$$

(1)-ből $a - b \neq 0$ -val osztva kapjuk, hogy

$$(3) \quad a^2 + ab + b^2 - a - b = 0,$$

(2)-ből pedig ugyanígy, hogy

$$(4) \quad 9(a+b)(a^2+b^2) - 8(a^2+ab+b^2) = 0.$$

(3) szerint $a^2+ab+b^2 = a+b$; ezt felhasználva, (4)-ből

$$a^2+b^2 = \frac{8}{9}, (5) \text{ amit } (3) - \text{ behelyettesítve } a+b-ab = \frac{8}{9}. (6)$$

Az (5), (6) egyenletrendszer közvetlenül negyedfokú egyenletre vezet; mivel mindkét egyenlet szimmetrikus, érdemes bevezetni az $u = a+b$, $v = ab$ új ismeretleneket: így az

$$u^2 - 2v = \frac{8}{9}, u - v = \frac{8}{9}$$

egyenletrendszerhez, és innen $v = u - \frac{8}{9}$ helyettesítésével az $u^2 - 2u + \frac{8}{9} = 0$ egyenlethez jutunk. Ennek gyökei $u_1 = \frac{2}{3}$, $u_2 = \frac{4}{3}$. Ennek megfelelően $v_1 = -\frac{2}{9}$ és $v_2 = \frac{4}{9}$.

A keresett a és b értékek most már a

$$t^2 - u_1 t + v_1 = 0, \quad \text{illetve a} \quad t^2 - u_2 t + v_2 = 0$$

egyenletek megoldásai.

Az első esetben $a = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$ és $b = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}$, a második esetben viszont a két gyök egyenlő, $a = b = \frac{2}{3}$. A megoldást az $a \neq b$ feltétellel keressük, így a második lehetőség eszik.

Ha $a = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$, akkor $f'(a) = -\frac{8}{9}$ és $f(a) - a \cdot f'(a) = -\frac{4}{27}$, így az $(a; f(a))$ -beli érintő egyenlete

$$y = -\frac{8}{9}x - \frac{4}{27}.$$

Mivel lépéseink megfordíthatóak, ugyanez a $(b; f(b))$ -beli érintő egyenlete is.

Kármán Péter (Budapest, Móricz Zs. Gimn., 12. o.t.)

Megjegyzések. 1. Az $a = b = \frac{2}{3}$ az $y = 3x^4 - 4x^3$ görbe – egyik – inflexiós pontjának az abszcisszája. Szigorúan véve itt is két egybeeső érintőről beszélhetünk, most azonban az érintési pontok is egybeesnek.

2. A III. megoldásban kapott (3) feltételt ($\frac{f'(a) - f'(b)}{a - b} = 0$) az $(a; b)$ koordináta-rendszerben ábrázolva egy ellipszist kapunk (3. ábra). Ez az ellipszis azokból a $P(a; b)$ pontokból áll, amelyekre az $(a; f(a))$ és $(b; f(b))$ -pontokban az $y = 3x^4 - 4x^3$ görbéhez párhuzamos érintők húzhatók. Az ellipszis tengelyei párhuzamosak a koordinátatengelyek szögfelezőivel, középpontja pedig a $C\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ pont.

Az ellipszis kistengelyének végpontjai, O , és $I\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$ az $y = 3x^4 - 4x^3$ görbe két inflexiós pontját adják. Először ránézésre meglepőbb, hogy a nagytengely végpontjai, $E_1\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ és $E_2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ éppen a kettős érintő érintési pontjait szolgáltatják. Ez a kapcsolat világossá válik, ha átgondoljuk a negyedfokú görbe „szimmetriáját” az $x = \frac{1}{3}$ pontra nézve. Ez az érték az érintők meredekségét számoló harmadfokú derivált grafikonja szimmetria-középpontjának az abszcisszája, és ha a negyedfokú polinomból kivonjuk a kettős érintő egyenletét, akkor a kapott negyedfokú görbe már valóban tengelyesen szimmetrikus lesz az $x = \frac{1}{3}$ egyenesre. (Ez indokolja – többek között – az I. megoldás helyettesítését.) Ez pedig azt jelenti, hogy a kettős érintő érintési pontjainak abszcisszái is szimmetrikusan helyezkednek el az $x = \frac{1}{3}$ pontra, a 3. ábrán a megfelelő pont rajta van az $a + b = \frac{2}{3}$ egyenletű egyenesen is, ami éppen az ellipszis nagytengelye.

Könnyen ellenőrizhető, hogy ez a tulajdonság minden olyan negyedfokú görbére teljesül, amelynek létezik kettős érintője, pontosabban szólva az $\frac{f'(a) - f'(b)}{a - b} = 0$ pontosan ebben az esetben lesz valós ellipszis egyenlete. Az így

kapott ellipszisek hasonlóak, excentricitásuk $\frac{\sqrt{3}}{3}$, állásuk olyan, ahogyan azt a 3. ábra mutatja, kistengelyük végpontjai a negyedfokú görbe inflexiós pontjait – azaz a harmadfokú derivált szélsőértékeit –, nagytengelyük végpontjai pedig a kettős érintő érintési pontjait adják.

