

Osszuk be a négyzetet keretekre az ábra szerint, és kívülről kezdve színezzünk minden második keretet feketére. A táblán minden mező pontosan két feketével szomszédos, tehát már ahhoz is meg kell jelölnünk a fekete mezőknek legalább a felét, ha csak annyit akarunk, hogy minden fekete mezőnek legyen megjelölt szomszédja. N tehát legalább ezek számának fele. Számoljuk ezt össze abban az esetben, amikor n 4-gyel is osztható, illetve ha 4-gyel nem osztható (az 1. ábrán a színezés az a) esetnek megfelelő).

$$4 \mid n: \quad \frac{1}{2} \left[12 + (16 + 12) + \dots + \left(\frac{n-4}{4} 16 + 12 \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{n}{4} 12 + 16 \frac{n-4}{4} \cdot \frac{n}{4} \cdot \frac{1}{2} \right] = \text{a)} \quad = \frac{1}{2} \left[3n + \frac{n(n-4)}{2} \right] = \frac{n^2 + 2n}{4},$$

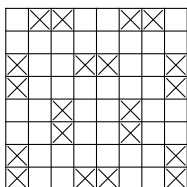
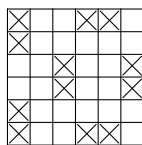
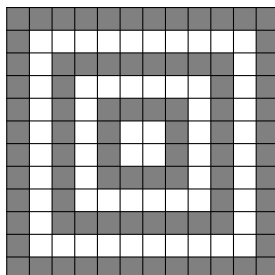
$$4 \nmid n: \quad \frac{1}{2} \left[4 + (4 + 16) + \dots + \left(4 + \frac{n-2}{4} 16 \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{n+2}{4} 4 + 16 \frac{n-2}{4} \cdot \frac{n+2}{4} \cdot \frac{1}{2} \right] = \text{b)} \quad = \frac{1}{2} \left[n + 2 + \frac{n^2}{2} - 2 \right] = \frac{n^2 + 2n}{4}$$

Ezt az értéket viszont el is érhetjük, csak a fekete kereten belül jelölve ki mezőket az alábbi módon: a fekete keretek bal alsó sarkából indulva két szomszédos mezőt kijelölünk, majd kettőt nem, majd kettőt megint igen stb., mindig a keret mentén lépegetve. Így nyilván minden keret felét jelöljük ki, így nyilván összesen $\frac{n^2 + 2n}{4}$ mezőt. A fekete keretek mezőinek nyilván lesz jelölt szomszédja, a fehér keretek mezői mellett pedig van valamelyik szomszédos fekete kereten jelölt mező, hiszen ezek közül a belső jelölését pontosan kettővel „feljebb” kezdtük el, így a két keret jelölt mezői váltogatják egymást.

N lehetséges legkisebb értéke tehát $\frac{n^2 + 2n}{4}$. A jelölést pl. $n = 2, 4, 6, 8$ -ra a 2. a, b, c, d ábra mutatja.

*Kiss Gergely és Keszegh Balázs*⁰ megoldása alapján

Megjegyzés. $n = 4k + 1$ -re $\frac{n^2 + 2n + 1}{4}$, $n = 4k + 3$ -ra $\frac{n^2 + 2n - 3}{4}$ mezőt kell kijelölni. Ennek bizonyítását itt nem közöljük.



⁰ Keszegh Balázs, a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium tanulója, a szlovák csapat tagjaként vett részt a versenyen.