

A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $a \geq b \geq c$.

1. eset: $a + b \leq 8c$. Ekkor $a^2 + 8bc \leq b^2 + 8ca$, hiszen ebből ekvivalens lépésekkel $0 \leq b^2 - a^2 + 8ac - 8bc$, $0 \leq (a - b)(8c - a - b)$ -t kapjuk, ami nyilvánvalóan igaz. Hasonló megfontolásokból, felhasználva a $b + c \leq 8a$ összefüggést, $b^2 + 8ca \leq c^2 + 8ab$ is igaz, tehát a, b, c azonosan rendezett a $\frac{1}{\sqrt{a^2 + 8bc}}, \frac{1}{\sqrt{b^2 + 8ca}}, \frac{1}{\sqrt{c^2 + 8ab}}$ számokkal, így a Csebisev-egyenlőtlenségből:

$$\begin{aligned} & \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq \\ & \geq \frac{1}{3}(a + b + c) \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \right). \end{aligned}$$

Felhasználva a harmonikus és négyzetes közepek közti egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \right) = \\ & = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 + 8ab}}}} \geq \frac{1}{\sqrt{\frac{(a^2 + 8bc) + (b^2 + 8ca) + (c^2 + 8ab)}{3}}}. \end{aligned}$$

Elég tehát belátni, hogy

$$\frac{a + b + c}{\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + 8ab + 8bc + 8ca}{3}}} \geq 1.$$

Ezt igazolva $\sqrt{3}(a + b + c) \geq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 8ab + 8bc + 8ca}$, $3(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 8ab + 8bc + 8ca$, $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0$, $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$, ami nyilvánvaló.

2. eset: $8c < a + b$. Ekkor

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} > \frac{a}{\sqrt{a^2 + b(a + b)}} > \frac{a}{\sqrt{(a + b)^2}} = \frac{a}{a + b}.$$

Hasonlóan $\frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} > \frac{b}{a + b}$, tehát

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} > \frac{a}{a + b} + \frac{b}{a + b} = 1.$$

Ezzel az állítást beláttuk.

Csóka Endre (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 10. o.t.)