

Ábrázoljuk az egyenest a koordináta-rendszerben, és vegyünk fel egy tetszőleges $P(a; b)$ rácspontot (a és b egész).

Határozzuk meg a P pont távolságát az e egyenestől. Állítsunk P ponton keresztül merőlegest az e egyenesre. A merőleges egyenes egyenlete: $y - b = -\frac{4}{3}(x - a)$. Ezután meghatározzuk a két egyenes M metszéspontjának koordinátáit, majd a PM távolságot.

$$3x - 4y = -4 \quad 3y = 3b + 4a / \cdot (-3) \quad / \cdot 4$$

Szorozzuk meg az első egyenletet (-4) -gyel, a másodikat 3 -mal, majd az első 3 -mal és a másodikat 4 -gyel, és adjuk össze az egyenleteket.

$$-12x + 16y = 16 \quad 12x + 9y = 9b + 12a,$$

$25y = 9b + 12a + 16,$	$9x - 12y = -12 \quad 16x = 12b + 16a$
$25x = 12b + 16a - 12,$	

azaz

$y = \frac{1}{25}(9b + 12a + 16)$ és $x = \frac{1}{25}(12b + 16a - 12)$. A P pont távolsága e -től:

$$PM = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = \sqrt{\left[\frac{1}{25}(12b + 16a - 12) - a\right]^2 + \left[\frac{1}{25}(9b + 12a + 16) - b\right]^2}.$$

Alakítsuk át a gyökjel alatti kifejezéseket:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{25}(12b + 16a - 12 - 25a)\right]^2 + \left[\frac{1}{25}(9b + 12a + 16 - 25b)\right]^2 = \\ & = \left[\frac{1}{25} \cdot (12b - 9a - 12)\right]^2 + \left[\frac{1}{25}(12a + 16 - 16b)\right]^2. \end{aligned}$$

Az $\frac{1}{25}$ -öt ki lehet emelni a gyökjel alól, és a zárójeles kifejezésekből kiemelhető 3 , illetve 4 . Vagyis átalakítva kapjuk, hogy a gyökjel alatt

$$[3(4b - 3a - 4)]^2 + [4(3a - 4b + 4)]^2$$

áll. Legyen $4b - 3a - 4 = u$, akkor $-4b + 3a + 4 = -u$. Ezt helyettesítve

$$PM = \frac{1}{25} \sqrt{(3u)^2 + [4(-u)]^2} = \frac{1}{25} \sqrt{25u^2} = \frac{1}{25} \cdot 5|u| = \left| \frac{4b - 3a - 4}{5} \right|,$$

ez pedig valóban racionális, mivel a és b egészek.

Megjegyzés. Az állítás minden olyan $px + qx + t = 0$ egyenletű egyenesre igaz, amelyben $p^2 + q^2$ négyzetszám (p, q, t egészek).

