

Vezessük be az egyelőre meghatározatlan t paraméterrel az $u = x - t$, $v = y - t$, $w = z - t$ új ismeretleneket. Ezekkel az ismeretlenekkel az átrendezett $xyz - xy - yz - zx + 2 = 0$ egyenlet

$$uvw + (t-1)(uv + vw + wu) + (t^2 - 2t)(u + v + w) + t^3 - 3t^2 + 2 = 0$$

alakba írható. Mivel $t^3 - 3t^2 + 2 = (t-1)(t^2 - 2t - 2)$, látható, hogy $t = 1$ választással a négy tag közül kettő lesz nulla, és az

$$(1) \quad uvw - u - v - w = 0$$

egyenlethez jutunk, ahol u , v és w nemnegatív egészek. Ezt fogjuk megoldani.

Ha u , v és w valamelyike nulla, akkor (1) szerint az összegük is az, és így az $u = v = w = 0$ megoldást kapjuk. Föltehető ezért, hogy mindhárom érték legalább 1.

(1) bal oldala tovább alakítható:

$$(2) \quad (uv - 1)(w - 1) + (u - 1)(v - 1) - 2 = 0.$$

Ha mindhárom érték legalább 2, akkor $uv \geq 4$, és így $(uv - 1)(w - 1) \geq 3$, amihez a nemnegatív $(u - 1)(v - 1)$ -et adva nem kaphatunk 2-t. Így u , v és w között van 2-nél kisebb, és mivel mindhárom érték legalább 1, egyikük – például w – pontosan 1. Ekkor (2) így alakul:

$$(3) \quad (u - 1)(v - 1) = 2.$$

A tényezők értéke nemnegatív, így a szorzat pontosan akkor 2, ha az egyik tényező 1, a másik pedig 2. Az $\{u, v\}$ halmaz tehát a $\{2, 3\}$ halmazzal egyenlő, így a szimmetrikus (1) nemnegatív megoldásai a $\{0, 0, 0\}$ és az $\{1, 2, 3\}$ számhármások. Az eredeti egyenlet megoldásaira tehát vagy $\{x, y, z\} = \{1, 1, 1\}$, vagy pedig $\{x, y, z\} = \{2, 3, 4\}$.

Az egyenletnek így 7 megoldása van a pozitív egészek körében, $x_1 = y_1 = z_1 = 1$, illetve a 2, 3, 4 számhármak hatféle permutációjaként adódó megoldások.

Megjegyzések. 1. A fentiekhez hasonló számolgatással könnyen ellenőrizhető, hogy az x, y, z számhármak pontosan akkor megoldása az eredeti egyenletnek, ha az $x_1 = 2 - x$, $y_1 = 2 - y$, $z_1 = 2 - z$ számhármak is megoldás. Mivel pedig az egyenletnek jól látható módon nincsen negatív egészekből álló megoldása (ekkor xy, yz, zx és $-xyz$ mindegyike legalább 1), így az egyenletnek olyan megoldása sem lehet, ahol mindhárom érték nagyobb 2-nél.

Az egyenletet kielégítő pozitív számhármak között tehát szerepelnie kell 3-nál kisebb értéknek is. Ha egy pozitív megoldásnak eleme a 2, például $x = 2$, akkor $x_1 = 0$, $y_1 = 2 - y$ és $z_1 = 2 - z$ is megoldás, ami azt jelenti, hogy $y_1 z_1 = 2$. Innen vagy $\{y_1, z_1\} = \{1, 2\}$ és így $\{y, z\} = \{-1, 0\}$, ami nem pozitív megoldás, vagy pedig $\{y_1, z_1\} = \{-1, -2\}$ és így $\{y, z\} = \{3, 4\}$; megkaptuk a $\{2, 3, 4\}$ számhármast.

Azokat a pozitív megoldásokat nem találtuk még meg, amelyek elemei között nem szerepel a 2. Az ilyen megoldások legkisebb eleme az 1. Ha például $x = 1 \leq y, z$, akkor az egyenlet az

$$y + z = 2$$

alakot ölti, ez pedig a pozitív egész y és z értékekre csak úgy teljesülhet, ha $y = z = 1$.

2. Az egyenletből pl. y kifejezhető mint az x változó paraméteres (a paraméter z) racionális törtfüggvénye:

$$(4) \quad y = \frac{zx - 2}{(z - 1)x - z}.$$

Ha az 1. megjegyzésben látottak szerint elintézzük azt az esetet, amikor valamelyik ismeretlen értéke 1, akkor a (3) függvényt abban az esetben kell vizsgálni, amikor x, y és $z \geq 2$, és mivel $x = y = z = 2$ nem megoldás, az is föltehető, hogy $z > 2$.

A függvény grafikonján keressünk tehát rácpontokat az $x \geq 2$; $y \geq 2$ feltételnek eleget tevő síknegyedben, amennyiben az egész értékű z paraméter értéke nagyobb 2-nél.

A függvény grafikonja szimmetrikus az $y = x$ egyenesre, és az ábrán látható. A hiperbola aszimptotái az $x = z_0$ és az $y = z_0$ egyenesek, ahol $z_0 = \frac{z}{z-1}$. Mivel $z > 2$, azért $1 < z_0 < 2$.

Ha $x = 2$, akkor $y = \frac{2z-2}{z-2} > 2$, így a függvény grafikonján csak a PQ íven találhatunk rácpontot.

Az olvasóra bízunk annak ellenőrzését, hogy ha $z > 4$, akkor a PQ íven sincsen rácpont, ha $z = 3$ vagy 4, akkor pedig az első esetben csak a $(2, 4)$ – és a szimmetrikus $(4, 2)$ –, a másodikban pedig csak a $(2, 3)$ és a szimmetrikus $(3, 2)$ rácpont esik a PQ ívre.

