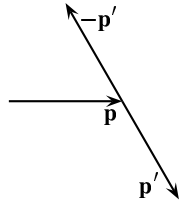


I. megoldás. Ha $\mathbf{p}$ α és 2α szögű elforgatottját $\mathbf{p}'$ -vel, illetve $\mathbf{p}''$ -vel jelöljük, akkor a feltétel szerint $\mathbf{p} + \mathbf{p}'' = \mathbf{p}'$, azaz

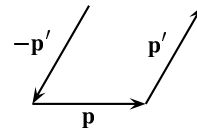
$$\mathbf{p} - \mathbf{p}' + \mathbf{p}'' = \mathbf{0}.$$

A három vektor, $\mathbf{p}$, $-\mathbf{p}'$ és $\mathbf{p}''$ abszolút értéke egyenlő és nem 0, így ha összegük $\mathbf{0}$, akkor egymáshoz fűzve őket, három egyenlő szakaszból álló zárt töröttvonalat kapunk, ami azt jelenti, hogy a háromtagú zárt vektorlánc egy szabályos háromszöget alkot.

Ez kétféleképpen lehetséges: ha pozitív körüljárás szerint a $\mathbf{p}$ vektort a $-\mathbf{p}'$ követi a láncban (1. ábra), illetve ha $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}''$ és $-\mathbf{p}'$ a sorrend (2. ábra).



1. ábra



2. ábra

Az első esetben a $\mathbf{p}'$ vektor a $\mathbf{p}$ vektor -60° -os elforgatottja, a másodikban pedig, a fordított sorrend miatt, a $\mathbf{p}'$ vektor a $\mathbf{p}$ 60° -os elforgatottja.

Az α szög tehát vagy $-60^\circ + n \cdot 360^\circ$, vagy pedig $60^\circ + k \cdot 360^\circ$, ahol n és k egész számok.

Megjegyzés. Látható, hogy az α szögre pontosan akkor teljesül a feladat feltétele, ha $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.

II. megoldás. Ha tetszőleges φ szög és $\mathbf{p}$ vektor esetén $\varphi(\mathbf{p})$ jelöli a $\mathbf{p}$ vektor φ szögű elforgatottját, akkor a feltétel szerint

$$(1) \quad \mathbf{p} + 2\alpha(\mathbf{p}) = \alpha(\mathbf{p}).$$

Forgassuk most el az (1)-ben szereplő vektorokat α szöggel. Mivel vektorok összege tagonként forgatható, azért

$$\alpha(\mathbf{p} + 2\alpha(\mathbf{p})) = \alpha(\mathbf{p}) + \alpha(2\alpha(\mathbf{p})) = \alpha(\alpha(\mathbf{p})).$$

Elforgatott vektort továbbforgatva az eredő elforgatás szöge az elforgatások szögének összege, ezért $\alpha(2\alpha(\mathbf{p})) = 3\alpha(\mathbf{p})$ és $\alpha(\alpha(\mathbf{p})) = 2\alpha(\mathbf{p})$. Így

$$(2) \quad \alpha(\mathbf{p}) + 3\alpha(\mathbf{p}) = 2\alpha(\mathbf{p}).$$

(1) és (2) összegét tekintve

$$\mathbf{p} + \alpha(\mathbf{p}) + 2\alpha(\mathbf{p}) + 3\alpha(\mathbf{p}) = \alpha(\mathbf{p}) + 2\alpha(\mathbf{p}),$$

azaz

$$\mathbf{p} + 3\alpha(\mathbf{p}) = \mathbf{0},$$

ha (1) teljesül, akkor a $\mathbf{p}$ vektor 3α szögű elforgatottja a $\mathbf{p}$ vektor ellentettje, a 3α -val való forgatás 180° -kal forgatja el a $\mathbf{p}$ vektort.

Így $3\alpha = 180^\circ + k \cdot 360^\circ$, ahonnan $\alpha_1 = 60^\circ$, $\alpha_2 = 180^\circ$ és $\alpha_3 = 300^\circ$. Mivel (1) és (2) összegét használtuk, a talált értékek nem feltétlenül megoldásai az eredeti feladatnak; valóban, $\alpha_2 = 180^\circ$ láthatóan nem megoldás, ilyenkor $\mathbf{p} + 360^\circ(\mathbf{p}) = 2\mathbf{p}$, ami nem egyenlő $180^\circ(\mathbf{p}) = -\mathbf{p}$ -vel, ha $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$.

A másik két érték, $\alpha_1 = 60^\circ$ és $\alpha_2 = 300^\circ$ láthatóan megoldások (3. ábra).

Megjegyzések. 1. A fenti megoldásban a $2\alpha(\mathbf{p})$ jelölés némi óvatosságot igényel: helyesebb volna $(2\alpha)\mathbf{p}$ -nek írni, hiszen az nem az $\alpha(\mathbf{p})$ vektor kétszerese, hanem a 2α szöggel elforgatott $\mathbf{p}$ vektor.

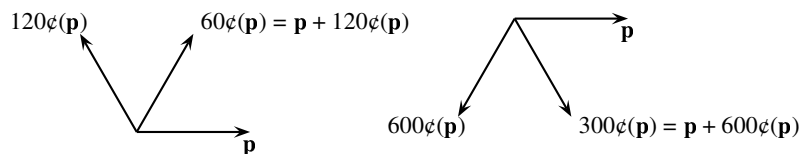
2. A feladat jelentése és a megoldás algebrai jellege a komplex számsíkon könnyen megmutatható. Ha az α szögű elforgatást az egységnyi abszolút értékű, α argumentumú a számmal való szorzásként hajtjuk végre, akkor a feltétel szerint a $p \neq 0$ komplex számra

$$p + a^2 p = ap,$$

ahonnan p -vel osztva az

$$(3) \quad a^2 - a + 1 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk, amit $(a+1)$ -gyel szorozva az $a^3+1=0$ egyenlet adódik. Ennek komplex gyökei, a komplex harmadik egységgyökök ellentettjei a (3) egyenlet megoldásai: $a_1 = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$ és $a_2 = \cos(-60^\circ) + i \sin(-60^\circ)$. Innen is az $\alpha_1 = 60^\circ$, $\alpha_2 = -60^\circ$ adódik megoldásul, utóbbi természetesen ugyanaz, mint a 300° -os forgatás.



3. ábra

3. Ha tetszőleges forgásszögek is szóba jöhetnek – a feladat szövegében nincs megszorítás a szögekre –, akkor természetesen végtelen sok megoldás adódik: $\alpha_k = 60^\circ + k \cdot 360^\circ$, illetve $\alpha_n = -60^\circ + n \cdot 360^\circ$, ahol k és n tetszőleges egész számok.