

Legyen $1 \leq i < j \leq 3$ esetén $\ell_i \cap \ell_j = Q_k$, ahol $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Belátjuk, hogy pl. Q_1Q_2 egyenese és AB egyenese párhuzamos. Ez éppen azt jelenti, hogy $\ell_3 \parallel AB$.

Irányított szögekkel fogunk számolni. $CAB \angle = \alpha$, $ABC \angle = \beta$, $BCA \angle = \gamma$. H_1H_2 -t BC -be¹Itt és a továbbiakban a szakaszok által meghatározott egyenesek forgatásáról van szó.

A szerk. $(-\alpha)$ szögű forgatás viszi $(H_2H_1C \angle = CAB \angle$, mert H_1H_2AB négyszög húrnégyszög: H_1 és H_2 rajta van az AB szakasz Thálesz-körén.)

T_1T_2 -t $\left(-\frac{\pi-\gamma}{2}\right)$ szögű forgatás viszi BC -be (a CT_1T_2 háromszög egyenlő szárú), így H_1H_2 -t T_1T_2 -be $(-\alpha) - \left(-\frac{\pi-\gamma}{2}\right)$ szögű forgatás viszi. H_1H_2 -t ℓ_3 -ba ennek kétszerese, $-2\alpha - (-\pi + \gamma) = \pi - 2\alpha - \gamma$ szögű forgatás viszi. Így ℓ_3 -at BC -be $-(\pi - 2\alpha - \gamma) + (-\alpha) = -\pi + \alpha + \gamma = -\beta$ szögű forgatás viszi, amivel állításunkat igazoltuk.

A Q_iT_i ($i = 1, 2, 3$) egyenesek a $W_1W_2W_3$ háromszöget határozzák meg.

Ezután a következőket látjuk be:

(i) A $W_1W_2W_3$ háromszög talpponti háromszöge a $Q_1Q_2Q_3$ háromszög.

(ii) A $W_1W_2W_3$ háromszög középvonalai a $T_1T_2T_3$ háromszöget adják.

(i) Egyszerűen adódik, hogy pl.: $H_1H_2B \angle = BH_2H_3 \angle = \frac{\pi}{2} - \beta$, ezért T_2 távolsága H_2H_1 -től és H_2H_3 -tól megegyezik. T_2 távolsága H_2H_1 -től és ℓ_3 -tól, illetve H_2H_3 -tól és ℓ_1 -től is ugyanakkora, azaz T_2 egyenlő távolságra van Q_2Q_1 és Q_2Q_3 -tól, így Q_2T_2 a $Q_1Q_2Q_3 \angle$ külső szögfelezője. Hasonló áll Q_3T_3 és Q_1T_1 esetén is. Emiatt (i) valóban fennáll.

(ii) Belátjuk, hogy pl. T_1T_2 egyenese párhuzamos W_1W_2 egyenesével, azaz Q_3T_3 -mal. (i) miatt Q_3T_3 a $Q_2Q_3Q_1$ szög külső szögfelezője, így mivel a $Q_1Q_2Q_3$ háromszög és az ABC háromszög egyállású és $Q_2Q_3Q_1 \angle = BCA \angle$, Q_3T_3 -at Q_3Q_2 -be $\left(-\frac{\pi-\gamma}{2}\right)$ szögű forgatás viszi. De láttuk, hogy T_1T_2 -t BC -be is $\left(-\frac{\pi-\gamma}{2}\right)$ szögű forgatás viszi. Tehát mivel BC és Q_3Q_2 párhuzamosak, T_1T_2 is párhuzamos Q_3T_3 -mal.

Így a $Q_1, Q_2, Q_3, H_1, H_2, H_3$ pontok rajta vannak a $W_1W_2W_3$ háromszög Feuerbach-körén, azaz egy körön vannak. Mivel a H_1, H_2, H_3 pontok éppen az ABC háromszög beírt körét határozzák meg, a bizonyítással készen vagyunk.

Gyenes Zoltán (Apáczai Cs. J. Gimn., 12. o.t.)