Belátjuk, hogy minden pozitív egész k-hoz található olyan pozitív egész n úgy, hogy (2^n+1) osztható n-nel, és n-nek pontosan k darab prímosztója van.
(Így $k=2000$-re is létezik ilyen n.)

k szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást. $k=1$-re igaz: $9 \mid 2^9+1$.

$k=2$-re: $9\cdot 19 \mid 2^{9\cdot 19}+1$.

Tegyük fel, hogy k-ra igaz $(k\geq 2)$:

$$p_1^2 p_2 p_3 \dots p_k \mid 2^{p_1^2 p_2 p_3 \dots p_k}+1, \qquad p_1=3<p_2=19<p_3<\dots<p_k.$$

Segédtétel. *Ha $p>3$ prím, akkor (2^p+1)-nek van p-nél nagyobb prímosztója.*

Bizonyítás. Legyen a q a (2^p+1)-nek egy p-nél nem nagyobb prímosztója. Ekkor $q>2$ és

$$2^p \equiv -1 \pmod q. \qquad \text{Négyzetre emelve} \qquad 2^{2p}\equiv 1 \pmod q.$$

A kis Fermat-tétel szerint $2^{q-1}\equiv 1 \pmod q$. Innen az euklideszi algoritmus alkalmazásával kapjuk, hogy $2^{(2p,\ q-1)}\equiv 1 \pmod q$. $p \not| q-1$, mert $q-1<p$, így $(2p,\ q-1)=2$

$$2^2=4\equiv 1 \pmod q, \qquad \text{tehát} q=3.$$

Másrészt $9 \not| 2^p+1$, mert egyébként $2^{2p}\equiv 1 \pmod 9$ és $2^6\equiv 1 \pmod 9$ miatt $2^{(6,\ 2p)}\equiv 1 \pmod 9$ az euklideszi algoritmus miatt, ami $2^2\equiv 1 \pmod 9$, és ez ellentmondás.

Ha tehát (2^p+1)-nek nincs p-nél nagyobb prímosztója, akkor $2^p+1\leq 3$, ami ellentmondás. Ezzel a segédtételt beláttuk.

Legyen ezután p_{k+1} a segédtétel szerinti prím, tehát $p_{k+1}>p_k$, és $p_{k+1}\mid 2^{p_k}+1$.

$$2^{p_k}\equiv -1 \pmod{p_{k+1}}, \qquad \text{és így} 2^{p_1^2 p_2 p_3 \dots p_k p_{k+1}} \equiv (-1)^{p_1^2 p_2 p_3 \dots p_{k-1} p_{k+1}} = -1 \pmod{p_{k+1}}, \qquad \text{azaz} p_{k+1} \mid 2^{p_1^2 p_2 p_3 \dots p_k p_{k+1}}+1.$$

Másrészt az indukciós feltevés miatt $p_1^2 p_2 \dots p_k \mid 2^{p_1^2 p_2 \dots p_k}+1$, tehát

$$2^{p_1^2 p_2 \dots p_k}\equiv -1 \pmod{p_1^2 p_2 \dots p_k}. 2^{p_1^2 p_2 \dots p_k p_{k+1}} \equiv (-1)^{p_{k+1}} = -1 \pmod{p_1^2 p_2 \dots p_k}. p_1^2 p_2 \dots p_k p_{k+1} \mid 2^{p_1^2 p_2 \dots p_k p_{k+1}}+1,$$

mert $p_1^2\cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$ és p_{k+1} relatív prímek. Így $k+1$-re $n=p_1^2\cdot p_2\cdot \dots \cdot p_k \cdot p_{k+1}$ megfelelő, amivel az indukciós bizonyítást befejeztük.

Zábrádi Gergely (Győr, Révai M. Gimn., 12. o.t.)