Ha a 3 szorzótényező közül egy vagy három negatív, akkor a szorzat negatív, vagyis kisebb 1-nél. Ha valamelyik tényező 0, akkor a szorzat is 0, szintén kisebb 1-nél. Pontosan két tényező nem lehet negatív, mert ha például $a-1+\frac{1}{b}<0$ és $b-1+\frac{1}{c}<0$ lenne, akkor az összegük

$$0>a-1+\frac{1}{b}+b-1+\frac{1}{c}=\left(b-2+\frac{1}{b}\right)+a+\frac{1}{c}=\frac{(b-1)^2}{b}+a+\frac{1}{c}>0,$$

mert a, b, $c>0$, ez nem lehet.

Tehát az az eset marad, amikor mindhárom szorzótényező pozitív.

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)=ab-a+\frac{a}{c}-b+1-\frac{1}{c}+1-\frac{1}{b}+\frac{1}{bc}=$$
$$=\frac{1}{c}-a+\frac{a}{c}-b+1-\frac{1}{c}+1-\frac{1}{b}+a=\frac{a}{c}-b+2-\frac{1}{b}=\frac{a}{c}-\frac{(b-1)^2}{b}\leq\frac{a}{c},$$

ugyanígy a másik 2-2 tényezőre. Mindhárom tényező pozitív, tehát

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1\frac{1}{a}\right)=$$
$$=\sqrt{\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)}\sqrt{\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)}\sqrt{\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\left(a-1+\frac{1}{b}\right)}\leq$$
$$\leq\sqrt{\frac{a}{c}}\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{c}{b}}=1,$$

ezt akartuk bizonyítani.

Győri Nikolett (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.)