

Egy nagyon hosszú henger körül a gravitációs erőter hengerszimmetrikus, a térerősség iránya (a henger végtől elegendően távol) radiális, azaz a henger tengelyére merőleges irányú, nagysága pedig csak a tengelytől mért távolságtól függ.

A gravitációs erőtvény és a Coulomb-törvény analógiáját felhasználva megállapíthatjuk, hogy egy m tömegű testből „kilépő” gravitációs erővonalak száma (azaz a $\mathbf{g}$ gravitációs gyorsulás és a rá merőleges felület szorzata) $4\pi f \cdot m$, ahol f a Newton-féle gravitációs állandó. Eszerint egy L hosszúságú, r sugarú henger palástján kilépő g -vonalak száma és a hengerben található tömeg kapcsolata:

$$g \cdot 2r\pi L = 4\pi f R^2 \pi L \rho, \quad \text{azaz} \quad g(r) = \frac{2\pi f R^2 \rho}{r}.$$

a) A fenti erőtvény egy körpályán keringő test sebessége (az $mg = mv^2/r$ mozgásegyenlet) szerint egy körpályán keringő test sebessége a pálya sugarától függetlenül (így a bolygó felszínén is)

$$v = \sqrt{2fR^2\pi\rho},$$

akkora tehát a bolygón az első kozmikus sebesség. Ez a Földre érvényes

$$v_F = \sqrt{\frac{fM_{\text{Föld}}}{R}} = \sqrt{\frac{4}{3}R^2\pi f\rho} = 7,9 \text{ km/s}$$

értéknél $\sqrt{3/2}$ -szer nagyobb, mintegy 9,7 km/s.

b) Egy r sugarú pályán keringő műhold keringési ideje $T_r = 2\pi r/v$, ha tehát ezen a bolygón egy „nap” T_0 hosszú, a szinkronműhold pályasugara

$$r_0 = \frac{T_0 v}{2\pi} = R \sqrt{\frac{T_0^2 f \rho}{2\pi}}.$$

A Föld esetében ez a távolság $r^* = R \sqrt[3]{T_0^2 f \rho / 3\pi}$, azaz

$$r_0 = \sqrt{\frac{2r^{*3}}{3R}} \approx 1,33 \cdot 10^8 \text{ m}.$$

A távközlési szinkronműholdak tehát $r_0 - R = 1,27 \cdot 10^8$ m magasan keringenek a hosszú, henger alakú bolygó felszíne felett.

c) A második kozmikus sebesség, azaz a bolygóról való szökési sebesség nagyon nagy, hogy pontosan mekkora, az a bolygó hosszától függ. Végtelen hossz esetén a szökési sebesség is végtelen nagy, mert az $1/r$ -es törvény szerint változó erőterből véges energia-befektetéssel *nem lehet* megszökni. Ennek belátására tekintsük a távolságoknak egy mértani haladvány szerint növekvő sorozatát: $r_n = \alpha^n r_0$ ($\alpha > 1$ és mondjuk $r_0 = R$). Az r_{n-1} magasságból az r_n magasságba való feljutáshoz szükséges $E(r_{n-1} \rightarrow r_n)$ energia független az n -től: ahogy n nő, amennyire csökken az erő, annyira nő az út. Végül is az r_0 magasságból az r_N magasságba való feljutáshoz $E(r_0 \rightarrow r_N) = NE(r_0 \rightarrow r_1)$ energia kell. Már ebből is látszik, hogy véges energiával csak véges magasságra lehet feljutni.

Ha a bolygó nem végtelen hosszú (a hossza mondjuk H), akkor amíg a végeitől távol vagyunk, és $r \ll H$, addig az erőtvény $1/r$ -es, de ha már $r \simeq H$, az erőtvény jellege megváltozik, és $r \gg H$ esetén a megszokott $1/r^2$ -es lesz. Egy ilyen bolygóról már véges nagyságú kezdősebességgel indulva is meg lehet szökni.

Dolgos Gergely (Budapest, Árpád Gimn., 11. o.t.) és *Siroki László* (Debrecen, Fazekas M. Gimn., 11. o.t.)

dolgozata alapján

Megjegyzés. Integrálszámítás segítségével belátható, hogy a második kozmikus sebesség az első kozmikus sebességnek kb. $\sqrt{2} \cdot \ln(H/R)$ -szere. (A Föld esetében az arány $\sqrt{2}$.) Ez a logaritmikus faktor még $H \gg R$ esetén sem túlságosan nagy (pl. $H = 10 R$ -nél v_{II}/v_I kb. 3, és $H = 1000 R$ -nél sem nagyobb 10-nél).

(G. P.)