

I. megoldás. Megmutatjuk, hogy pl. $N = 5 \cdot 10^{2000} + 1$ megfelelő. Mivel

$$N^2 = (5 \cdot 10^{2000} + 1)^2 = 25 \cdot 10^{4000} + 10^{2001} + 1$$

utolsó 2001 jegye: 000...001, az $N^{2000} = (N^2)^{500}$ is 2000 nullára és egy egyesre végződik. Ezért $N^{2001} = N \cdot N^{2000}$ utolsó 2001 jegye megegyezik N utolsó 2001 jegyével.

Németh Adrián (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn. 9. o.t.)

Megjegyzés. A binomiális tétellel megmutatható, hogy $10^{2000} + 1$ is kielégíti a feladat követelményét.

Paulin Roland (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 7. o.t.)

II. megoldás. Ha egy a szám négyzete „ a -ra végződik”, akkor minden további hatványa is; elegendő tehát olyan 2001 jegyű a számot találni, amelyre $10^{2001} \mid a^2 - a = a(a - 1)$. Utóbbi biztosan teljesül, ha $2^{2001} \mid a$ és $5^{2001} \mid a - 1$, és akkor is, ha $5^{2001} \mid a$ és $2^{2001} \mid a - 1$. Az első két oszthatósági feltételt kielégítő számot keressük $a = 2^{2001}x$ alakban (ekkor az első oszthatóság már biztosított), erre még $2^{2001}x - 1 = 5^{2001}y$ -nak, azaz $2^{2001}x - 5^{2001}y = 1$ -nek kell teljesülnie. Mivel 2^{2001} relatív prím 5^{2001} -hez, ilyen x (és y) egész biztosan létezik, és az ezzel képezett $2^{2001}x$ szám 10^{2001} -nel való a_1 osztási maradéka egy, a feladat feltételét kielégítő *legfeljebb* 2001 jegyű szám. Hasonlóan kaphatunk olyan, ugyancsak legfeljebb 2001 jegyű a_2 számot, amelyre $5^{2001} \mid a_2$ és $2^{2001} \mid a_2 - 1$. Mivel $2^{2001} \mid a_1$, $5^{2001} \mid a_2$, $5^{2001} \mid a_1 - 1$, $2^{2001} \mid a_2 - 1$, azért $a_1a_2 = 10^{2001}c$ és $(a_1 - 1)(a_2 - 1) = 10^{2001}d$, alkalmas $c > d$ pozitív egészekkel. Így

$$a_1 + a_2 - 1 = a_1a_2 - (a_1 - 1)(a_2 - 1) = 10^{2001}(c - d)$$

is osztható 10^{2001} -nel, ezért legalább 10^{2001} . Tehát az a_1 és a_2 közül legalább az egyik pontosan 2001 jegyű, ellenkező esetben ugyanis $10^{2001} \leq a_1 + a_2 - 1 < a_1 + a_2 < 2 \cdot 10^{2000}$, ami ellentmondás.