

I. megoldás. Ha $p = 1$, akkor a sorozat minden tagja 1, a sorozat elemeiből készíthető összegek egész számok, amiből következik, hogy a nem egész számok nem közelíthetők meg tetszőleges pontossággal.

Mivel egy pozitív p szám helyett a reciprokából, $\frac{1}{p}$ -ből kiindulva ugyanazt a sorozatot kapjuk, így elegendő az olyan sorozatokat vizsgálni, amelyekre $p > 1$. Ekkor az

$$1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots + \frac{1}{p^n} + \dots$$

végtelen mértani sor konvergens, összege $S = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1}$, ami azt jelenti, hogy a p nempozitív kitevőjű hatványaiból készített minden véges összeg kisebb, mint S .

Ha tehát $S < p$ (ez $p > 1$ miatt pontosan akkor teljesül, ha $p > 2$), akkor a sorozat elemeiből készített minden véges összeg vagy S -nél kisebb – ha nem tartalmaz pozitív kitevőjű p -hatványt –, vagy legalább p .

Ebben az esetben pedig az S -nél nagyobb és p -nél kisebb számok nem közelíthetők meg tetszőleges pontossággal.

Megmutatjuk, hogy ha $1 < p \leq 2$ – és így a szimmetrikus $\frac{1}{2} \leq p < 1$ esetben is – már bármely pozitív valós szám tetszőleges pontossággal megközelíthető. Ha $u > 0$, akkor járunk el úgy, ahogyan egy pozitív egész kettős számrendszert alakít szoktuk fölírni: lépésenként a nála nem nagyobb p -hatványok közül a legnagyobbikkal csökkentjük a számot.

Könnyen meggondolható, hogy mivel a p^n , $n \in \mathbf{Z}$ sorozat szigorúan monoton növekvő, nem korlátos és $\lim_{n \rightarrow -\infty} p^n = 0$, azért létezik – pontosan egy – olyan n_1 kitevő, hogy

$$(1) \quad p^{n_1} \leq u < p^{1+n_1}.$$

Mivel most $p \leq 2$, azért (1)-ből $u < 2p^{n_1}$, és így

$$0 \leq u - p^{n_1} < p^{n_1}$$

következik. Ha tehát az $u - p^{n_1}$ különbség nem nulla – ami nyilván föltehető, egyébként ugyanis az u -t *pontosan* is elő tudjuk állítani –, akkor kisebb, mint p^{n_1} , a közelítés első tagja.

Az eljárás most már folytatható az $u_1 = u - p^{n_1}$ különbségre. A fentiekből következik, hogy az ehhez kiválasztott legnagyobb p -hatvány kitevője határozottan kisebb, mint n_1 . Ha az eljárás véges sok lépésben leáll, akkor egyenlőséget kapunk, és így az u véges sok p -hatvány összege. Ha nem ez a helyzet, akkor a $p^{n_1} > p^{n_2} > \dots > p^{n_k} > \dots$ egész kitevőjű p -hatványok végtelen csökkenő sorozatát kapjuk, amelyekre

$$p^{n_1} + p^{n_2} + \dots + p^{n_k} < u < p^{n_1} + p^{n_2} + \dots + p^{1+n_k}$$

minden k -ra.

A két korlát eltérése $p^{n_k}(p-1)$. Mivel $n_k \leq n_1 - (k-1)$, azért az alsó korlát hibája legfeljebb $\frac{(p-1) \cdot p^{n_1}}{p^{k-1}}$. Itt a p és n_1 rögzített számok, a számláló konstans, a nevező pedig $p > 1$ miatt tetszőlegesen nagy lehet, így a $p^{n_1} + p^{n_2} + \dots + p^{n_k} + \dots$ közelítés hibája tetszőlegesen kicsivé válik, ha k elég nagy.

Tehát az $\frac{1}{2} \leq p < 1$ és az $1 < p \leq 2$ számokra teljesül, hogy minden pozitív szám tetszőleges pontossággal megközelíthető p egész kitevőjű hatványaiból készített véges összegekkel.

Zalán Péter (Budapest, Fasori Evang. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

II. megoldás. Most is csak a $p > 1$ esetben vizsgáljuk a feladat kérdését. Pozitív számok egy H halmazát hívjuk „egyenletesnek”, ha van olyan $d > 0$, hogy minden pozitív számtól legfeljebb 1 távolságra található H -beli elem. Megmutatjuk, hogy ha $1 < p \leq 2$, akkor az $1, p, p^2, \dots, p^n, \dots$ számokból készített véges összegek halmaza egyenletes, mégpedig $d = 1$ választással. Ezt az alábbi formában igazoljuk az n -re vonatkozó teljes indukcióval:

Ha $0 < T < p^n$, akkor van olyan részhalmaza az $\{1, p, \dots, p^{n-1}\}$ halmaznak, amelyben az elemek összege 1-nél kevesebbel tér el T -től.

Ha $n = 0$, akkor $0 < T < 1$, így az üres halmaz – amelyben az elemek összege 0 – megfelelő. Legyen most $n > 0$, tegyük fel, hogy az állítás igaz minden n -nél kisebb pozitív egészre, és tekintsük a $0 < T < p^n$ számot. Ha $T < p^{n-1}$ is igaz, akkor az indukciós feltevésből következik az állítás. Ha $T = p^{n-1}$, akkor az egyelemű $\{p^{n-1}\}$ halmaz megfelelő (Az eltérés 0.)

Ha $p^{n-1} < T < p^n$, akkor $0 < T - p^{n-1} < p^n - p^{n-1} = (p-1) \cdot p^{n-1}$, és mivel $0 < p-1 \leq 1$, azért $(p-1) \cdot p^{n-1} \leq p^{n-1}$.

Így $0 < T - p^{n-1} < p^{n-1}$, ezért az indukciós feltevés szerint a $T - p^{n-1}$ különbséget 1-nél jobban közelítő összeghez p^{n-1} -et hozzávéve, a T -t közelítő összeget kapunk.

Legyen most $u > 0$ tetszőleges, és tekintsük a $T = p^N \cdot u$ számot, ahol N egész. A fentiek szerint a T -hez létezik a p nemnegatív hatványainak egy véges halmaza úgy, hogy az elemek S összegére

$$|T - S| < 1.$$

Ezt az egyenlőtlenséget p^N -nel osztva kapjuk, hogy

$$\left| u - \frac{S}{p^N} \right| < \frac{1}{p^N}.$$

Mivel $p > 1$ esetén $\frac{1}{p^N}$ tetszőlegesen kicsi lehet, továbbá $\frac{S}{p^N}$ a kívánt alakú összeg, ezért $1 < p \leq 2$ esetén bármely pozitív u szám tetszőlegesen megközelíthető a p hatványaiból készített összegekkel. Megmutatjuk, hogy ha $p > 2$, akkor ez nem lehetséges. A $p^0, p^1, \dots, p^{n-1}$ számokból 2^n összeg készíthető, ezek mindannyian 0 és $1+p+\dots+p^{n-1} = \frac{p^n-1}{p-1}$

közt vannak. A szomszédos összegek közti átlagos eltérés tehát $\frac{p^n-1}{p-1} : 2^n$, ami $p > 2$ miatt tetszőlegesen nagy lehet.

Mivel a p negatív kitevőjű hatványainak összege korlátos, előbb-utóbb biztosan nem hidalhatók majd át a nemnegatív kitevőjű hatványok felhasználásával készített összegek közti eltérések.

Így $\frac{1}{2} \leq p < 1$ vagy $1 < p \leq 2$.