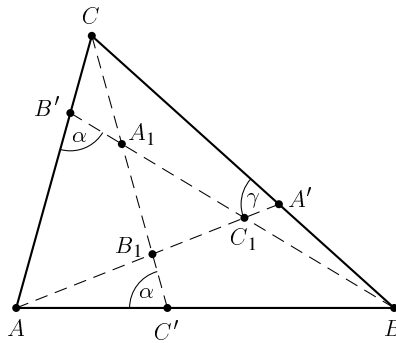


Feladatunk megfogalmazásából következik, hogy az ABC háromszög semelyik két oldala nem egyenlő. Ha ugyanis lenne két egyenlő oldala, akkor azok egymás tükörképei volnának a harmadik oldalhoz tartozó magasságvonalra nézve. Ekkor pedig az $A_1B_1C_1$ háromszög nem lehetne teljes egészében az ABC háromszög belsejében.



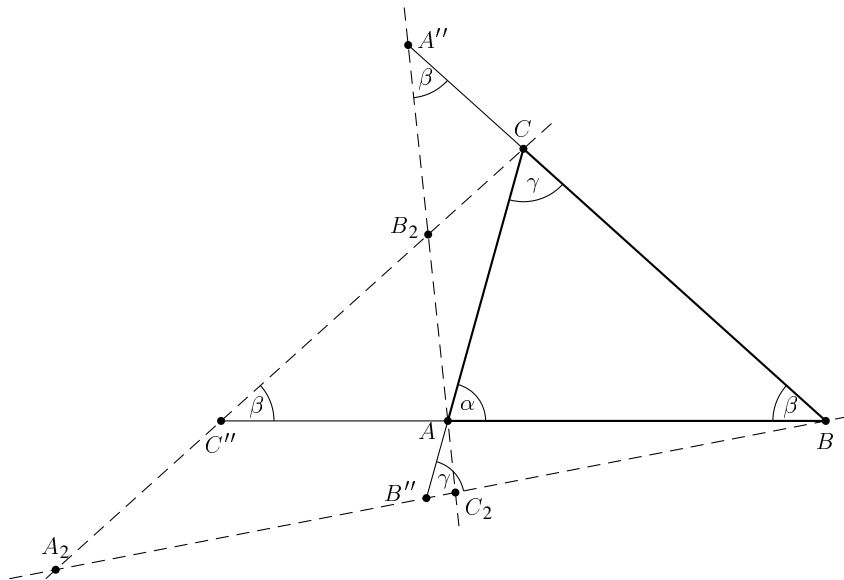
1. ábra

Jelöljük az ABC háromszög szögeit a szokásos módon α , β , γ -val. Feltéhetjük, hogy $\alpha > \gamma > \beta$ teljesül. Jelöljük rendre A' , B' , C' -vel a $BC \cap B_1C_1$, $CA \cap C_1A_1$ és $AB \cap A_1B_1$ pontokat (1. ábra). Mivel az AA' , BB' és CC' egyenesek az ABC háromszög egy-egy oldalának a háromszög valamelyik magasságára vonatkozó tükörképei, azért – figyelembe véve a szögek nagyságrendjét – kapjuk, hogy $AB'B \sphericalangle = B'AB \sphericalangle = \alpha$, $AC'C \sphericalangle = C'AC \sphericalangle = \alpha$ és $A'AC \sphericalangle = A'CA \sphericalangle = \gamma$. A $B'AC'A_1$ négyszögben három szög α , ezért az A_1 -nél lévő szöge $360^\circ - 3\alpha$.

Tehát $B_1A_1C_1 \sphericalangle = 180^\circ - (360^\circ - 3\alpha) = 3\alpha - 180^\circ$. Az $A'AB$ háromszög A' -nél lévő külső szöge γ , B -nél lévő szöge pedig β , ezért az A -nál lévő belső szöge $A'AB \sphericalangle = \gamma - \beta$. Így

$$A_1B_1C_1 \sphericalangle = AB_1C' \sphericalangle = 180^\circ - (B_1AC' \sphericalangle + AC'B_1 \sphericalangle) = (\alpha + \beta + \gamma) - ((\gamma - \beta) + \alpha) = 2\beta.$$

Az $A_1C_1B_1$ szög pedig $180^\circ - ((3\alpha - 180^\circ) + 2\beta) = 2\gamma - \alpha$.



2. ábra

Hasonlóan számolhatjuk ki az $A_2B_2C_2$ háromszög szögeit is (2. ábra). $AA''B \sphericalangle = \beta$, $CC''B \sphericalangle = \beta$ és $BB''C \sphericalangle = \gamma$ (A'' , B'' és C'' a tükörképek és az eredeti háromszög oldalegyeneseseinek metszéspontjai), tehát

$$A_2B_2C_2 \sphericalangle = B_2AC \sphericalangle + B_2CA \sphericalangle = (\gamma - \beta) + (\alpha - \beta) = 180^\circ - 3\beta;$$

$$B_2C_2A_2 \sphericalangle = 180^\circ - A''C_2B \sphericalangle = 180^\circ + \beta - 2\gamma;$$

$$C_2A_2B_2 \sphericalangle = \beta + \gamma - \alpha.$$

Mivel $\alpha > \gamma > \beta$, azért e három szög közül a legkisebb, $\beta + \gamma - \alpha$ nem lehet 60° -nál nagyobb, ennek kell a háromszög 20° -os szögének lennie. A másik két szögről nem lehet eldönteni, hogy melyikük a 70° , ezért két esetet kell megkülönböztetnünk.

i)

$$A_2B_2C_2 \sphericalangle = 180^\circ - 3\beta = 90^\circ, B_2C_2A_2 \sphericalangle = 180^\circ + \beta - 2\gamma = 70^\circ, C_2A_2B_2 \sphericalangle = \beta + \gamma - \alpha = 20^\circ.$$

Az egyenletrendszert megoldva $\alpha = 80^\circ$, $\beta = 30^\circ$ és $\gamma = 70^\circ$ adódik. Ezekből kapjuk, hogy

$$A_1B_1C_1\triangleleft = 2\beta = 60^\circ, \quad B_1A_1C_1\triangleleft = 3\alpha - 180^\circ = 60^\circ \quad \text{és} \quad A_1C_1B_1\triangleleft = 2\gamma - \alpha = 60^\circ.$$

ii)

$$A_2B_2C_2\triangleleft = 180^\circ - 3\beta = 70^\circ, B_2C_2A_2\triangleleft = 180^\circ + \beta - 2\gamma = 90^\circ, C_2A_2B_2\triangleleft = \beta + \gamma - \alpha = 20^\circ.$$

Ebből az egyenletrendszerből pedig $\alpha = 80^\circ$, $\beta = \left(\frac{110}{3}\right)^\circ$ és $\gamma = \left(\frac{190}{3}\right)^\circ$, tehát

$$A_1B_1C_1\triangleleft = \left(\frac{220}{3}\right)^\circ, \quad B_1A_1C_1\triangleleft = 60^\circ \quad \text{és} \quad A_1C_1B_1\triangleleft = \left(\frac{140}{3}\right)^\circ.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy mindkét eset létre is jön, ha megfelelő ABC háromszögből indulunk ki. Tehát az $A_1B_1C_1$ háromszögnek vagy minden szöge 60° , vagy pedig szögei $\left(\frac{140}{3}\right)^\circ$, 60° és $\left(\frac{220}{3}\right)^\circ$.

Rácz Béla András (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., 9. o.t.) dolgozata alapján