

I. megoldás. Jelölje M a keresett maximumot. Ekkor a KöMaL 2001/5. szám 270–281. oldalán látottak szerint M az a legnagyobb pozitív szám, amelyre az $x(x+1)(3-x) = M$ egyenletnek egynél több megoldása van (*ábra*).

Az egyenlet $x^3 - 2x^2 - 3x + M = 0$ alakba írható. Ebben a formában a Cardano-formula nem alkalmazható, ehhez először a másodfokú tagot ki kell küszöbölnünk. Ezt a szokásos $t = x - \frac{2}{3}$ helyettesítéssel érhetjük el:

$$x^3 - 2x^2 - 3x + M = \left(x - \frac{2}{3}\right)^3 - \frac{13}{3} \left(x - \frac{2}{3}\right) + M - \frac{70}{27},$$

így a keresett M számra a

$$t^3 - \frac{13}{3}t + M - \frac{70}{27} = 0$$

egyenletnek kétszeres gyöke van. Az ismert feltétel,

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

most $q = M - \frac{70}{27}$ és $p = -\frac{13}{3}$ helyettesítésével

$$\left(\frac{M - \frac{70}{27}}{2}\right)^2 = \left(\frac{13}{9}\right)^3.$$

Ez két számra teljesül, ezek $M = \frac{70 + 26 \cdot \sqrt{13}}{27}$ és $m = \frac{70 - 26 \cdot \sqrt{13}}{27}$. $M > 0 > m$, és a módszerünkkel kapott feltétel (az $x^3 - 2x^2 - 3x + M = 0$ egyenletnek kétszeres gyöke van) nemcsak az $x(1+x)(3-x)$ lokális maximumára, M -re, hanem a negatív lokális minimumra, m -re is teljesül (*ábra*).

Az $x(1+x)(3-x)$ kifejezés maximuma tehát a pozitív számok halmazán

$$M = \frac{70 + 26 \cdot \sqrt{13}}{27}.$$

Szekeres Balázs (Szolnok, Verseyhy Ferenc Gimn., 10. o.t.)

Megjegyzések. 1. A fenti okoskodásból nem derül ki – a feladat ezt nem is kérdezte –, hogy az x milyen értékére kapjuk ezt a maximumot.

2. A kétszeres gyök meglétét feltételezve az $x^3 - 2x^2 - 3x + M$ polinom $(x - \alpha)(x - \beta)^2$ gyöktényezőssé alakja is elvezet a megoldáshoz.

A gyökök és együtthatók közötti összefüggések szerint ugyanis

$$\alpha + 2\beta = 2 \quad \text{és} \quad (1)\beta^2 + 2\alpha\beta = -3.(2)$$

Az (1) egyenletből α -t kifejezve a

$$3\beta^2 - 4\beta - 3 = 0$$

egyenletet kapjuk, ennek megoldásai

$$\beta_1 = \frac{2 - \sqrt{13}}{3} < 0 < \beta_2 = \frac{2 + \sqrt{13}}{3}.$$

Ismét megkaptuk az $f(x) = x(1+x)(3-x)$ függvény lokális minimumát is, ez $f(\beta_1)$ (ld. *ábra*). A maximum értéke

$$f(\beta_2) = f\left(\frac{2 + \sqrt{13}}{3}\right) = \frac{70 + 26 \cdot \sqrt{13}}{27} \approx 6,0646.$$

3. A májusi számunkban közölt cikk bemutatja, hogy az ott vizsgált $x \cdot \frac{8+x}{2} \cdot \frac{8-x}{2}$ függvény maximuma hogyan határozható meg a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség felhasználásával is. Ez akkor a tényezők szimmetriáján múlott, a függvény négyzete olyan háromtényezős szorzatként volt felírható, ahol a tényezők számtani közepe már nem függött az x -től. Ez a trükk most látszólag nem működik. Tanulságos megnézni, hogyan alkalmazható mégis, miközben ez I. megoldás t változója új szerepben tűnik fel.

II. megoldás. A $t = x - \frac{2}{3}$ változó bevezetésével az I. megoldásban látottak szerint $x(1+x)(3-x) = -t^3 + \frac{13}{3}t + \frac{70}{27}$, azaz a vizsgált szorzat maximumához elegendő megtalálni a $g(t) = t\left(\frac{13}{3} - t^2\right)$ maximumát, a keresett érték ennél

$\frac{70}{27}$ -del nagyobb. Az $x > 0$ feltétel most $t > -\frac{2}{3}$ -ot jelent, de ha $0 > t > -\frac{2}{3}$, akkor $g(t) < 0 = g(0)$, tehát a maximumot elegendő a $t \geq 0$ halmazon keresnünk, és $\max g(t) \geq 0$.

Most már minden további nélkül alkalmazható a májusi szám cikkében látott elemi módszer, $g(t)$ a $t \geq 0$ halmazon pontosan akkor maximális, ha

$$2g^2(t) = 2t^2 \left(\frac{13}{3} - t^2 \right) \left(\frac{13}{3} - t^2 \right)$$

maximális. A pozitív tényezők összege $\frac{26}{3}$, így a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség szerint

$$2g^2(t) \leq \left(\frac{26}{9} \right)^3,$$

$$\text{azaz } g(t) \leq \frac{\sqrt{26^3}}{27 \cdot \sqrt{2}} = \frac{26}{27} \cdot \sqrt{13}.$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $2t^2 = \frac{13}{3} - t^2$, azaz $t = \frac{\sqrt{13}}{3}$.

Az $x(1+x)(3-x)$ szorzat maximuma tehát a pozitív számok halmazán $\frac{26}{27} \cdot \sqrt{13} + \frac{70}{27}$, és pontosan akkor van egyenlőség, ha $x = \frac{\sqrt{13}}{3} + \frac{2}{3}$.

Ambrus Gergely (Szeged, Radnóti M. Gimn., 12. o.t.)

Megjegyzés. Többen kísérleteztek a gyakran hatásos „határozatlan együttható” módszerével, ez azonban közvetlenül nem vezet eredményre. A módszer lényege az, hogy valamelyik tényezőt megkíséreljük egy olyan – pozitív – c szorzóval kiegészíteni, hogy az így módosított három tényező összegéből éppen kiessen a változó, a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség felső becslésében konstans szerepeljen.

Az első két tényezőnél csak a triviális $c = 1$ lehetséges, a harmadik tényezőre ugyan $c = 2$ választással

$$x + (1+x) + 2(3-x) = 7,$$

tehát a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség szerint most

$$x(1+x)(6-2x) \leq \left(\frac{7}{3} \right)^3,$$

és így a vizsgált szorzatra

$$x(1+x)(3-x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{7}{3} \right)^3$$

adódik, de ebben az egyenlőtlenségben az első két tényező x és $1+x$ **nem lehetnek egyenlők**, a felhasznált egyenlőtlenségben tehát nem állhat egyenlőség, a kapott felső becslés nem a maximum, hanem csupán egy felső korlát.

A fenti módszer finomítása azonban célhoz vezet.

III. megoldás. A keresett c együtthatót bontsuk tovább két határozatlan tényező, u és v szorzatára, vizsgáljuk az $u \cdot v \cdot f(x) = (ux) \cdot (v(1+x)) \cdot (3-x)$ szorzat három tényezőjét. Feltételeink a következők:

- i) u és v pozitív számok;
- ii) a tényezők összege, $ux + v(1+x) + (3-x)$ állandó;
- iii) az $ux = v(1+x) = 3-x$ egyenletrendszernek létezik pozitív megoldása. (A szorzatra kapott felső becslésben tehát elérhető az egyenlőség.)
- ii)-ből $u + v = 1$. Ezt iii)-ba helyettesítve az

$$ux = (1-u)(1+x)$$

egyenlet megoldása $x = \frac{u-1}{1-2u}$, az $ux = 3-x$ egyenleté pedig $x = \frac{3}{1+u}$.

Ha ez a két megoldás egyenlő, akkor innen u -ra az

$$u^2 + 6u - 4 = 0$$

egyenlet adódik, ennek pozitív gyöke $u = \sqrt{13} - 3$. (Ekkor az x -re kapott mindkét tört értelmes.)

Ha most $v = 1 - u = 4 - \sqrt{13}$, akkor láthatóan v is pozitív, $ux + v(1+x) + (3-x) = 3 + v$, és van olyan x , mégpedig $\frac{3}{1+u} = \frac{2+\sqrt{13}}{3}$, hogy az

$$(ux) \cdot (v(1+x)) \cdot (3-x)$$

szorzat tényezői egyenlő pozitív számok.

Most már alkalmazható a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség,

$$\sqrt[3]{u \cdot v \cdot f(x)} \leq \frac{3+v}{3},$$

és az egyenlőség lehetséges, pontosan akkor, ha $x = \frac{2+\sqrt{13}}{3}$. A maximum értéke most már adódik, akár behelyettesítéssel, akár pedig úgy, hogy a jobb oldal köbét elosztjuk az uv szorzattal. Az eredmény összevonás és egyszerűsítés után $\frac{2}{27}(35 + 13\sqrt{13})$.

Márton Sándor (Szeged, Radnóti M. Gimn., 12. o.t.)

