

I. megoldás. Ha a hangya a görbe $P(a; b)$ pontjában tartózkodik, akkor az

$$x^2 + bx + b^2 - 6 = 0 \quad \text{és az} \quad y^2 + ay + a^2 - 6 = 0$$

egyenleteknek van valós gyöke – éppen a , illetve b –, és így az egyenletek diszkriminánsa, $D_b = 24 - 3b^2$ és $D_a = 24 - 3a^2$ nem negatív. Ha valamelyikük, például $D_a = 0$, azaz $|a| = 2\sqrt{2}$ (ekkor $b = -\frac{a}{2}$), akkor a hangya az y tengellyel párhuzamosan nem tud tovább haladni. Ez a két pont $Y_1(2\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, illetve $Y_2(-2\sqrt{2}; \sqrt{2})$. Hasonlóan, amikor $D_b = 0$, azaz a hangya az $X_1(\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$ vagy az $X_2(-\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$ pontban van, akkor az x tengellyel párhuzamosan nem mehet tovább.

Mindez jól látható, ha meggondoljuk, hogy a szóban forgó görbe ellipszis (1. ábra), az X_i , Y_i pontok pedig a tengelyekkel párhuzamos érintők érintési pontjai.

Ha a hangya a fenti négytől különböző $P(a; b)$ görbepontban tartózkodik, akkor mindkét megengedett irányban el tud indulni. Ha P nem az útvonal kezdőpontja, akkor persze csak az egyik irány mentén mehet tovább, hiszen a másik irányból kellett megérkeznie.

Ha például az x tengellyel párhuzamosan a görbe $Q(c; b)$ pontjába jut, akkor a fentiek szerint $c \neq a$, és ez a két szám, a és c az $x^2 + bx + b^2 - 6 = 0$ egyenlet két valós gyöke, azaz $a + c = -b$.

Hasonlóan kapjuk, hogy ha a hangya az y tengellyel párhuzamos útvonalon az $R(a; d)$ pontba lép a P -ből, akkor $d + b = -a$ (2. ábra).

Látható, hogy a hangya bármely lépésének végpontjai olyan pontok a görbén, amelyek összesen 4 koordinátájából kettő megegyezik, és ennek, valamint a további két koordinátának az összege 0, $a + b + c = 0$ és $a + b + d = 0$.

Ha tehát a hangya például az x tengellyel párhuzamosan indul el a $P_0(a; b)$ pontból, akkor útja során a következő görbepontokon halad át:

$$\begin{aligned} P_0(a; b) &\rightarrow P_1(-a - b; b) \rightarrow P_2(-a - b; a) \rightarrow P_3(b; a) \rightarrow \\ &\rightarrow P_4(b; -a - b) \rightarrow P_5(a; -a - b) \rightarrow P_6(a; b), \end{aligned}$$

látható tehát, hogy ha útja során nem érinti az X_i , Y_i pontok egyikét sem, akkor pontosan a hatodik lépésben megáll. Ha útközben ezek valamelyikébe jut, akkor persze már korábban is megállhat.

Babos Attila (ELTE Radnóti M. Gyak. Gimn., 12. o.t.)

Megjegyzések. 1. Könnyen látható, hogy az X_i pontokba csak az y tengellyel párhuzamosan érkezik a hangya, az X_1 -be a $B_1(\sqrt{2}; \sqrt{2})$, az X_2 -be pedig a $B_2(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ pontból. Ugyanez a két pont – azok a pontok az ellipszisen, amelyek koordinátái egyenlők –, ahonnan az Y_1 és az Y_2 pontokban eljuthatunk.

Összefoglalva tehát, ha a hangya az X_i , Y_i , B_i pontoktól különböző helyzetből indul, akkor pontosan a hatodik lépés után áll meg, a B_i pontokból indulva egy, az X_i , Y_i pontokból indulva pedig két lépés után akad el.

A lényegében helyes megoldások szerzői többé-kevésbé így okoskodtak, de szinte mindenki megelégedett a hangya kivételes útvonalainak vizsgálatáról.

2. A $c = -a - b$ jelöléssel a hangya útvonala – a kivételes pontoktól eltekintve – az $(a; b)$, $(c; b)$, $(c; a)$, $(b; a)$, $(b; c)$, $(a; c)$, $(a; b)$ pontokon át vezet, a pontok koordinátái között csak az a , b , c számok fordulnak elő, úgy, hogy $a + b + c = 0$ (3. ábra). Maga az útvonal – ahogyan a görbe is – tengelyesen szimmetrikus az $y = x$ egyenletű egyenesre.

Az ilyen számhármakok érdekes kapcsolatban állnak a B. 3470. feladat egy lehetséges megközelítésével. (Lásd a megjegyzést a B. 3470. feladat III. megoldásához e szám 413. oldalán.)

Ha az $f(x) = x^3 - 6x$ harmadfokú polinomból indulunk ki (4. ábra), akkor a feladatban szereplő ellipszis egyenlete:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = 0,$$

az ellipszis pontjainak koordinátái pedig olyan $(a; b)$ számpárok, amelyekre $f(a) = f(b)$.

A szélsőértékektől eltekintve f minden többszörösen fölvetett értékét háromszor veszi föl, a hangya egy adott útvonala pedig éppen egy ilyen számhármast határoz meg az út során érintett görbepontok koordinátáiként. Ebben az értelmezésben a feladat állítása nyilvánvaló.

II. megoldás. Forgassuk el a görbét – és a hangya útvonalát is – (-45°) -kal, ekkor egyenlete $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$ alakú lesz (5. ábra).

Az elforgatott útvonal egy, a koordinátatengelyekkel 45° -os szöget bezáró töröttvonal. Az ellipszis excentricitása, $\frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, így ha a görbére és a hangya útvonalára is $\sqrt{3}$ arányú merőleges affinitást alkalmazunk, akkor az ellipszis origó középi körbe, a hangya útvonala pedig olyan töröttvonalba megy át, amelynek szomszédos szakaszai 60° , illetve -60° -os szöget zárnak be az x tengellyel (6. ábra).

A hangya két egymást követő lépése utáni helyzetét tehát megkaphatjuk, ha útvonalának P kezdőpontját 120° -kal elforgatjuk a kör kezdőpontja körül. A forgatás iránya a hangya haladási irányától függ, és mivel az utazás során ez nem változik, hat egymást követő lépés után a hangya visszajut oda, ahonnan elindult, és így valóban megáll.

Mindez majdnem minden kezdőpontra teljesül annak a hat pontnak a kivételével, amelyek közül négyben az x tengellyel 60° , illetve -60° -os szöget bezáró érintők érintik a kört – ezekbe a pontokba érve a hangya elakad –, kettő pedig a függőleges átmérő két végpontja – innen juthat a hangya az érintési pontokba (7. ábra).

Megjegyzés. A második bizonyításból nyomban adódik – de a görbe egyenletét vizsgálva is kiderül –, hogy az állítás kizárólag az ellipszis alakján múlik, azon, hogy a kis- és a nagytengely aránya, a görbe excentricitása $1 : \sqrt{3}$.



