

Akárhogyan választunk is ki $k - 1$ pénztárost, van olyan zár, amelyikhez egyiküknek sincs kulcsa; a többi $n - k + 1$ pénztáros mindegyike rendelkezik ehhez a zárhoz való kulccsal. Így az n pénztáros minden $k - 1$ elemű részhalmazához tartozik (legalább) egy zár, amelyet egyikük sem tud kinyitni, és különböző $(k - 1)$ -es halmazokhoz különböző az ily módon hozzárendelt zár. A zárok száma tehát legalább annyi, mint a $k - 1$ elemű (pénztáros) részhalmazok száma, vagyis $\binom{n}{k - 1}$.

Megmutatjuk, hogy ez a becslés éles, azaz $\binom{n}{k - 1}$ zár esetén létezik a kulcsoknak olyan kiosztása, amelyre a feladat feltételei teljesülnek. Számozzuk meg a zárokat 1-től $\binom{n}{k - 1}$ -ig, és lássuk el ugyanezekkel a sorszámokkal a pénztárosok n elemű halmazának $k - 1$ elemű részhalmazait. Tekintsük a következő elosztást: egy pénztáros pontosan akkor kapjon kulcsot az i -edik sorszámú zárhoz, ha nem tartozik hozzá az i -edik sorszámmal jelölt részhalmazhoz. Ekkor semelyik $k - 1$ pénztáros sem tudja a páncélszekrényt kinyitni, hiszen az ő halmazuk sorszámával jelölt zárhoz egyiküknek sincs kulcsa. Viszont k pénztáros között már mindegyik kulcsnak akad gazdája, hiszen (minden i -re) az i -edik zárhoz kulccsal nem rendelkezők száma pontosan $k - 1$.

Ambrus Gergely (Szeged, Radnóti M. Gimn., 12. o.t.)