

Nyilván $\frac{1}{q} > |f(0)|$, ezért $f(0) = 0$. Az f függvény értéke minden más helyen pozitív egész, hiszen $f(n) = 0 < n$ esetén

$$\frac{1}{q} > |f(n) - qn| = |-qn|$$

szerint $n < \frac{1}{q^2} < 1$, ami lehetetlen.

Könnyen ellenőrizhető továbbá, hogy $q(q-1) = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1$. Így tetszőleges n természetes számra

$$\begin{aligned} |f(f(n)) - f(n) - n| &= |f(f(n)) - qf(n) + (q-1)f(n) - q(q-1)n| = \\ &= |f(f(n)) - qf(n) + (q-1)(f(n) - qn)|. \end{aligned}$$

A minden a, b valós számra teljesülő $|a+b| \leq |a| + |b|$ egyenlőtlenség szerint az előbbi abszolút érték legfeljebb

$$|f(f(n)) - qf(n)| + |(q-1)(f(n) - qn)| = |f(f(n)) - qf(n)| + (q-1)|f(n) - qn|,$$

ami a feladat feltétele szerint $\frac{1}{q} + (q-1)\frac{1}{q} = 1$ -nél kisebb. Tehát $|f(f(n)) - f(n) - n| < 1$, ami csak az $f(f(n)) - f(n) - n = 0$ esetben állhat fenn, hiszen $f(f(n)), f(n)$ és n egészek.

Bóka Gergely (Szolnok, Versegly Ferenc Gimn., 10. o.t.)