

A legkisebb energiát igénylő pálya megkeresésekor két szempontot is figyelembe kell veyünk:

(i) A Mars elérésekor a szondának feltehetően marad még mozgási energiája, ez annál nagyobb, minél „kerekebb” a pálya.

(ii) Az űrszondát a Földhöz képest kell felgyorsítani, így a Föld sebessége segítheti, de nehezítheti is a pályára állást.

Az optimális átszállópálya nyilván olyan, hogy a Mars pályáját csak érinti, azaz a sebességnek ott csak érintőleges komponense van. A vizsgálandó pályákat jól jellemezhetjük a szonda N perdületével (impulzusmomentumával), ami a szonda tömegének, a Marsnál mérhető (de az állócsillagokhoz viszonyított) sebességnek és a Mars pályasugarának a szorzata! (Az N a pályára jellemző állandó, míg a szonda sebessége a pálya mentén pillanatról pillanatra változik!) A szonda energiája kifejezhető a perdülettel és a Mars R pályasugarával:

$$E(N) = -f \frac{Mm}{R} + \frac{N^2}{2mR^2}.$$

Itt M a Nap tömege, m az űrszonda tömege, f pedig a Newton-féle gravitációs állandó. $E(N)$ kifejezhető a pálya a fél-nagy tengelyével is:

$$E(N) = -\frac{fMm}{2a},$$

így összefüggést kapunk az N és a között. Eszerint amíg

$$N < \sqrt{\frac{2fMm^2rR}{R+r}} = N_0$$

(ahol r a Föld pályasugara), addig $a < (R+r)/2$, azaz az N -nel jellemzett pálya metszi a Földét, míg az N_0 -hoz tartozó pálya éppen érinti azt (1. ábra), az $N > N_0$ esettel pedig egyáltalán nem kell foglalkoznunk, mert ilyen pályára a Földről nem indíthatunk űrszondát.

Legyen a Föld pályájának és az „átszálló pályának” metszéspontjában a Föld sebességének nagysága v , az űrszondáé u , a pályák érintői által bezárt szög pedig α (2. ábra).

A szonda Földhöz képest (!) mérhető sebességének a Föld sebességével párhuzamos és arra merőleges komponensei rendre $u_1 = u \cos \alpha - v$ és $u_2 = u \sin \alpha$. Ennek megfelelően az energiaszükséglet

$$E_{\text{gy}} = \frac{1}{2}m [u_1^2 + u_2^2] = \frac{1}{2}m [(u \cos \alpha - v)^2 + (u \sin \alpha)^2] = \frac{1}{2}m (u^2 + v^2 - 2vu \cos \alpha).$$

A szonda impulzusmomentuma segítségével u^2 is és $u \cos \alpha$ is megadható:

$$\frac{1}{2}mu^2 = f \frac{Mm(R-r)}{Rr} + \frac{N^2}{2mR^2}, \quad \text{illetve} \quad mu \cos \alpha = \frac{N}{r},$$

így a minimalizálandó energia

$$\begin{aligned} E_{\text{gy}}(N) &= f \frac{Mm(R-r)}{Rr} + \frac{N^2}{2mR^2} - \frac{vN}{r} + \frac{1}{2}mv^2 = \\ &= \frac{1}{2mR^2} \left(N - \frac{mvR^2}{r} \right)^2 + f \frac{Mm(R-r)}{Rr} - \frac{mv^2R^2}{2r^2}. \end{aligned}$$

3. ábra

Ez a kifejezés N -nek kvadratikusan függvénye, melynek

$$N^* = \frac{mvR^2}{r}$$

értéknél van minimuma, így az az $N < N^*$ értékekre monoton csökkenő. Mivel $N_0 < N^* < 0 < N \leq N_0$ pályák közül az $N = N_0$ pálya az optimális (3. ábra). Ezt a pályát *Hohmann-ellipszisnek* is nevezik.

$N = N_0$ mellett a pálya nagytengelye éppen $R+r$, azaz az átszállópálya nemcsak a Mars pályáját, de a Földét is érinti, és a két érintési pont a szonda pálya-ellipszis nagytengelyének két áttellenes végpontja. N_0 értékét behelyettesítve némi átalakítások után

$$E_{\text{gy}} = f \frac{Mm}{r} \left(\sqrt{\frac{R}{R+r}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2,$$

amiből a szükséges kezdősebesség

$$v_{\text{rel}} = \sqrt{2E_{\text{gy}}/m} = 2,9 \text{ km/s.}$$

Ekkora sebességgel kell rendelkeznie a szonda a Földhöz képest „a Föld gravitációs terének elhagyása” (vagyis a Földtől való számottevő eltávolodása) után. Az űreszköz sebessége a Föld felszínének közelében természetesen ennél

nagyobb kell legyen, hiszen a számolás során a Föld gravitációs terét nem vettük figyelembe; ez a tény azonban a fenti megfontolásokat, az optimális pálya meghatározását nem érinti.

Hátra van még annak meghatározása, hogy milyen helyzetben kell legyen a Mars az űrszök indításakor. Jelöljük a szonda keringési idejét T -vel, a Marsét pedig T_M -mel. A szonda éppen $T/2$ ideig repül, ennyivel kell a kilövéskor a Marsnak a találkozási ponthoz (A Földdel átellenes ponthoz) képest lemaradni. Eszerint a kilövéskor a Föld–Nap–Mars szög

$$\pi \left(1 - \frac{T}{T_M} \right) = \pi \left[1 - \left(\frac{R+r}{2R} \right)^{3/2} \right] = 0,774 \text{ rad} = 44,3^\circ.$$

Geresdi Attila (Pécs, Árpád Fejedelem Gimn., 11. o.t.) és *Mics Zoltán* (Ipolyság, Magyar Tanítási Nyelvű Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A Hohmann-ellipszis a Földről indítható és a Mars pályáját elérő űrszonda-pályák közül a *legnagyobb* (!) energiájú, viszont ebben az esetben lehet a legjobban kihasználni a Föld sebességét a szonda pályára állításakor. (W. F.)

