

I. megoldás. Ha a háromszög oldalait a, b, c -vel, területét $2s$ -sel, területét pedig T -vel jelöljük, akkor

$$(1) \quad T = r \cdot s = r_a(s-a) = r_b(s-b) = r_c(s-c) = \frac{abc}{4R}.$$

(Ezeknek az összefüggéseknek a bizonyítása megtalálható pl. lapunk 2000/9. számának 532. oldalán.) Héron képletét, valamint (1)-et használva:

$$\begin{aligned} r_a + r_b + r_c - r &= \frac{T}{s-a} + \frac{T}{s-b} + \frac{T}{s-c} - \frac{T}{s} = \\ &= \frac{T}{T^2} [(s(s-b)(s-c) + s(s-a)(s-c) + s(s-a)(s-b) - (s-a)(s-b)(s-c))] = \\ &= \frac{1}{T} [(s - (s-a))(s-b)(s-c) + s(s-a)((s-c) + (s-b))] = \\ &= \frac{1}{4T} [a(a^2 - (b-c)^2) + ((b+c)^2 - a^2) \cdot a] = \frac{1}{4T} a(4bc) = \frac{abc}{T} = 4R. \end{aligned}$$

Vagyis a háromszög köré írható körének sugara egyszerűen kifejezhető a hozzáírt körök és a beírt kör sugarának segítségével.

Eredeti feladatunk ezek után egyszerűen megoldható a számtani és a mértani közepek közötti egyenlőtlenség, illetve annak felhasználásával, hogy a körülírt kör sugara legalább kétszerese a beírt kör sugarának.

$$\begin{aligned} \frac{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}{R^4} &\leq \frac{r}{R} \cdot \left(\frac{r_a + r_b + r_c}{3R} \right)^3 = \frac{r}{R} \cdot \left(\frac{4R + r}{3R} \right)^3 = \\ &= \frac{1}{27} \cdot \frac{r}{R} \left(4 + \frac{r}{R} \right)^3 \leq \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(4 + \frac{1}{2} \right)^3 = \frac{27}{16}. \end{aligned}$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a háromszög szabályos.

II. megoldás. Ugyancsak az (1) összefüggéseket és Héron képletét felhasználva a bizonyítandó egyenlőtlenség

$$\frac{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}{R^4} = \frac{T^4}{s(s-a)(s-b)(s-c)R^4} = \frac{T^2}{R^4} \leq \frac{27}{16},$$

azaz $\frac{T}{R^2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$ alakra hozható. Tudjuk, hogy $T = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$, $R = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \beta}$ (α, β, γ a háromszög szögei), ezért elég azt bizonyítani, hogy

$$\frac{T}{R^2} = 2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Mivel a $\sin x$ függvény a $(0, \pi)$ intervallumon pozitív és alulról konkáv, azért a számtani és mértani közép közötti, valamint a Jensen-egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \leq \left(\frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}{3} \right)^3 \leq \left(\sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \right)^3 = (\sin 60^\circ)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8},$$

ami ekvivalens a bizonyítandó állítással. Egyenlőség csak szabályos háromszög esetén teljesül.

Balka Richárd (Sárvár, Tinódi S. Gimn., 12. o.t.) dolgozata alapján

