Azt kell megmutatni, hogy legfeljebb $\left(\frac{703}{732}\right)^{30}$ annak a valószínűsége, hogy 30 embernek csupa különböző napon van a születésnapja. Ezt két, egymástól eltérő modell esetén is igazoljuk.

1. *értelmezés:* A 30 születésnapot tekintsük a naptárban elfoglalt sorrendjükben felírva. A „kedvező esetek" száma (366 napos évvel számolva, hiszen akkor kapunk nagyobb értéket) $\binom{366}{30}$. Az összes esetek száma 366 elem 30-adosztályú ismétléses kombinációinak a száma: $\binom{395}{30}$. A keresett valószínűség így

$$p_1 = \frac{\binom{366}{30}}{\binom{395}{30}} = \frac{366 \cdot 365 \cdot \dots \cdot 337}{395 \cdot 393 \cdot \dots \cdot 366}.$$

2. *értelmezés:* Különbséget teszünk az esetek között aszerint, hogy egy adott dátum a 30 ember közül – jelöljük őket rendre $E_1, E_2, \ldots, E_{30}$-cal – kinek a születésnapja. Annak a valószínűsége, hogy E_2 más napon született, mint E_1, nyilván $\frac{365}{366}$. Az E_1 és E_2 (eltérő) születési dátumának ismeretében $\frac{364}{366}$ annak a valószínűsége, hogy E_3 születésnapja E_1 és E_2 születésnapjától is különbözik; ezért hármójuk születésnapja $\frac{365 \cdot 364}{366 \cdot 366}$ valószínűséggel különböző. E gondolatmenetet folytatva kapjuk, hogy

$$p_2 = \frac{366 \cdot 365 \cdot \dots \cdot 337}{366^{30}}$$

annak a valószínűsége, hogy mind a 30 ember más-más napon született.

A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség szerint:

$$\sqrt[30]{366 \cdot 365 \cdot \dots \cdot 337} < \frac{366 + 365 + \dots + 337}{30} = \frac{703}{2},$$

tehát

$$p_1 < p_2 < \frac{\left(\frac{703}{2}\right)^{30}}{366^{30}} = \left(\frac{703}{732}\right)^{30}.$$

Baharev Ali (Vác, Boronkay Gy. Gimn., 12. o.t.)

Megjegyzés. A kapott két különböző valószínűség annak a következménye, hogy a kétféle értelmezés során mást tekintettünk eseménynek: először a születésnapok elhelyezkedése (a naptárban) volt egy esemény, másodszor viszont egy lista, amelyben mindenki neve mellett szerepel a születési dátuma. Az eltérő értelmezésekre álljon itt a következő, nagyon egyszerű példa. Aladár és Botond feldob egy-egy érmét; annak a valószínűségét keressük, hogy a két dobás megegyező kimenetelű. Az egyformán valószínű lehetséges események:

$$[A(f); B(f)]; \quad [A(f); B(i)]; \quad [A(i); B(f)]; \quad [A(i); B(i)].$$

Mivel a 4 esetből kettőnél egyezik meg a két dobás eredménye, a keresett valószínűségre joggal mondhatjuk, hogy az $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Tegyük föl azonban, hogy nem tudunk jelen lenni a dobásoknál, ezért megkérünk egy közjegyzőt az események rögzítésére. Egy űrlapot kell kitöltenie, amelyen a „fej" és az „írás" dobások száma áll. Hányféle jegyzőkönyvet kaphatunk a dobások szemtanújától? Nyilván hármat, ezek:

[2 fej, 0 írás]; [1 fej, 1 írás]; [0 fej; 2 írás].

Ha arra gondolunk, hogy a jegyzőkönyvet véletlenszerűen kitöltve egyenlő eséllyel kaphatjuk a három változat bármelyikét, a keresett valószínűséget $\frac{1}{3}$-nak találjuk.